Capítulo 2

Interpolación y aproximación de funciones.

1. Introducción.
2. Interpolación mediante polinomios.
3. Diferencias divididas.
4. Interpolación de Hermite.
5. Interpolación mediante *splines*.
6. Interpolación de Fourier.
7. Teoría de mínimos cuadrados.
8. Aproximación de funciones periódicas.

2.1. Introducción.

Tratamos en este capítulo de la interpolación y de la aproximación numéricas, dos problemas en los que, a partir de un número dado de puntos de cierta función, se trata de obtener otra función, más sencilla que la primera y que se "aproxime" a ella lo "más posible". ¿Qué significa ésto? Pues depende del problema. En el caso de la interpolación, la nueva función debe "pasar" por todos los puntos considerados. Es decir, que si suponemos conocidos los valores de una función $f(x)$ en un conjunto de $n+1$ valores de su argumento,

$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, se trataría de encontrar otra función $g(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$, que depende de $n+1$ parámetros y que debe cumplir que

$$g(x_k; a_0, a_1, \ldots, a_n) = f(x_k),\ \ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

La función g se denomina función de interpolación y proporciona una aproximación de f para cualquier valor del argumento x. Si $x \in [x_0, x_n]$ se habla propiamente de interpolación, mientras que si $x \notin [x_0, x_n]$ se habla de extrapolación. Estudiaremos distintas formas de interpolación de acuerdo con el tipo de funciones de interpolación que consideremos, empezando con los polinomios por ser la opción más sencilla.

En el caso de la aproximación, no se impone la restricción de que la nueva función reproduzca los puntos de la función a aproximar considerados inicialmente. Como veremos se imponen distintas condiciones que permiten abordar el problema.

2.2. Interpolación mediante polinomios.

Supongamos una función $f(x)$ de la que se conocen $n+1$ puntos

$$\{[x_k, y_k = f(x_k)],\ \ k = 0, 1, \ldots, n\}\,.$$

Nos planteamos hallar un polinomio del menor grado posible, $p(x)$, que interpole a la función $f(x)$, es decir que verifique

$$p(x_k) = y_k,\ \ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Teorema. *Si $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de números reales distintos e $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ es un conjunto de números reales arbitrarios, entonces existe un polinomio único $p_n(x)$, de grado igual o menor que n, que verifica*

$$p_n(x_k) = y_k,\ \ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Demostración. En primer lugar demostraremos la unicidad. Supongamos que existen dos polinomios $p_n(x)$ y $q_n(x)$ que satisfacen las condiciones. Entonces, el polinomio $p_n(x) - q_n(x)$ se anula en los $n+1$ puntos distintos $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$. El grado de este polinomio es, como máximo, n, y según el teorema fundamental del álgebra, no puede tener más de n raíces. La única forma de que se anule en $n+1$ puntos es que $p_n(x) - q_n(x) = 0$ y, por tanto se debe verificar que $p_n(x) = q_n(x)$.

La existencia la demostraremos por inducción. Es obvio que para $n = 0$ siempre podemos escoger $p_0(x_0) = y_0$, siendo $p_0(x)$ un polinomio de grado 0, es decir, una función constante. Supongamos ahora que hemos determinado un polinomio $p_l(x)$, de grado igual o menor que l, que verifica que

$$p_l(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, l\,.$$

A partir de este polinomio construimos un nuevo polinomio de la forma

$$p_{l+1}(x) = p_l(x) + c_{l+1}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_l)\,,$$

siendo c_{l+1} una constante. Este nuevo polinomio es, a lo sumo, de grado $l + 1$ y, además, verifica que

$$p_{l+1}(x_k) = p_l(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, l\,.$$

Fijamos ahora la constante c_{l+1} de forma que se cumpla la condición que falta

$$p_{l+1}(x_{l+1}) = y_{l+1}\,.$$

Entonces,

$$p_{l+1}(x_{l+1}) = y_{l+1} = p_l(x_{l+1}) + c_{l+1}(x_{l+1} - x_0)(x_{l+1} - x_1) \cdots (x_{l+1} - x_l)\,,$$

con lo que

$$c_{l+1} = \frac{y_{l+1} - p_l(x_{l+1})}{(x_{l+1} - x_0)(x_{l+1} - x_1) \cdots (x_{l+1} - x_l)}\,.$$

Como los puntos x_k son todos distintos, el denominador nunca se anula y siempre es posible encontrar la constante c_{l+1}. Por tanto queda demostrado el teorema.

2.2.1. Forma de Lagrange.

Vamos a ver ahora una forma de construir el polinomio de interpolación $p_n(x)$ debida a Lagrange. En este procedimiento el polinomio se expresa como

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j\, l_j(x)\,,$$

donde los $l_k(x)$ son polinomios de grado n, que dependen de las abscisas $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$ que se interpolan, pero no de los valores $\{y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$. Recordemos que la condición que debe cumplir el polinomio es

$$p_n(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Entonces es evidente que si

$$l_j(x_k) = \delta_{jk},\ \ k = 0, 1, \ldots, n,\ \ j = 0, 1, \ldots, n\,.$$

entonces

$$p_n(x_k) = \sum_{j=0}^{n} y_j\, l_j(x_k) = \sum_{j=0}^{n} y_j\, \delta_{jk} = y_k,\ \ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Como los polinomios $l_j(x)$ han de tener grado n, deben ser de la forma

$$l_j(x) = c_j(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)\,.$$

La constante c_j se obtiene sin más que imponer que

$$l_j(x_j) = c_j(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n) = 1\,,$$

de donde resulta

$$c_j = \frac{1}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}\,.$$

Por tanto

$$l_j(x) = \prod_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k},\ \ j = 0, 1, \ldots, n\,.$$

El polinomio de interpolación en su forma de Lagrange resulta entonces

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}\,.$$

Ejemplo:
Consideramos el polinomio $p(x) = 3x^3 + 30x^2 - 56x - 870$ y calculamos los valores en varias abscisas obteniendo

$$\{(x_k, p(x_k) \equiv y_k) = (5, -25), (-7, -37), (-6, -102), (0, -870)\}\,.$$

Vamos a calcular usando la forma de Lagrange el polinomio de interpolación de orden 3 correspondiente a esos puntos.

Los polinomios l_j vienen dados por

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \frac{x^3+13x^2+42x}{660}, \\
l_1(x) &= \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{x^3+x^2-30x}{84}, \\
l_2(x) &= \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{x^3+2x^2-35x}{66}, \\
l_3(x) &= \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{x^3+8x^2-23x-210}{210}.
\end{aligned}$$

con lo que el polinomio en la forma de Lagrange viene dado por

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= -25l_0(x) - 37l_1(x) - 102l_2(x) - 870l_3(x) \\
&= 3x^3 + 30x^2 - 56x - 870\,,
\end{aligned}$$

que es precisamente el polinomio utilizado para generar los puntos considerados inicialmente.

2.2.2. Forma de Newton.

Hay que recordar que, como ya demostramos, el polinomio de interpolación es único, si bien existen distintas formas (algoritmos) de expresarlo y de llegar a él. La forma de Newton del polinomio está relacionada con la propia demostración del teorema y utiliza un procedimiento recursivo. Para obtener el polinomio $p_n(x)$ buscado se comienza con la función constante,

$$p_0(x) = c_0 \equiv y_0\,,$$

y se van construyendo polinomios p_l añadiendo un término a los polinomios p_{l-1}

$$p_l(x) = p_{l-1}(x) + c_l(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{l-1})\,,$$

con

$$c_l = \frac{y_l - p_{l-1}(x_l)}{(x_l-x_0)(x_l-x_1)\cdots(x_l-x_{l-1})}\,.$$

Esto permite escribir

$$
\begin{aligned}
p_l(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_l(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{l-1}) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{l} c_k \prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)\,.
\end{aligned}
$$

Conocidos los coeficientes $\{c_k,\ k = 0,1,\ldots,l\}$, una forma eficiente de evaluar los polinomios $p_l(x)$ es la que se denomina multiplicación anidada o algoritmo de Horner. Si definimos $d_k = x - x_k$,

$$
\begin{aligned}
p_l(x) &= c_0 + c_1 d_0 + c_2 d_0 d_1 + \ldots + c_{l-1} d_0 d_1 \ldots d_{l-2} + c_l d_0 d_1 \cdots d_{l-1} \\
&= c_0 + d_0(c_1 + d_1(c_2 + \ldots + d_{l-3}(c_{l-2} + d_{l-2}(c_{l-1} + d_{l-1} c_l))\ldots))\,.
\end{aligned}
$$

Entonces, definiendo

$$
u_k = u_{k+1} d_k + c_k,\ \ k = l, l-1, \ldots, 0\,,
$$

con $u_{l+1} = 0$, el valor de p_l en x vendrá dado por u_0.

Este algoritmo puede utilizarse para calcular los coeficientes c_l que, como hemos visto dependen de $p_{l-1}(x_l)$.

Aunque la forma de Lagrange permite escribir el polinomio de forma inmediata, la forma de Newton tiene dos ventajas: un menor coste computacional y la posibilidad de añadir puntos nuevos sin que los cálculos ya realizados se pierdan (debido a la forma recursiva de la construcción del polinomio de interpolación).

Ejemplo:
Calcular el polinomio de interpolación de orden 3 para los valores

$$
\{(x_k, p(x_k) \equiv y_k) = (5,-25), (-7,-37), (-6,-102), (0,-870)\}\,.
$$

Los coeficientes valen $c_0 = -25,\ c_1 = 1,\ c_2 = 6,\ c_3 = 3$, con lo que el polinomio resulta ser

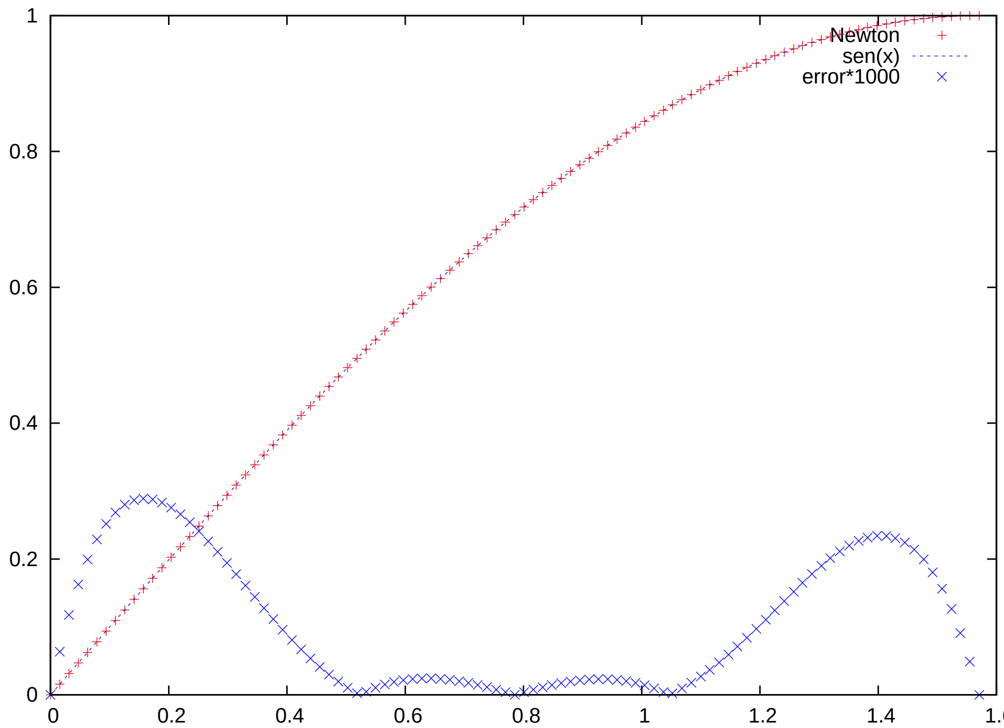
$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= -25 + (x-5) + 6(x-5)(x+7) + 3(x-5)(x+7)(x+6) \\
&= 3x^3 + 30x^2 - 56x - 870\,,
\end{aligned}
$$

que es precisamente el polinomio utilizado para generar los puntos iniciales.

Ejemplo:
Hallar el polinomio de orden mínimo que interpola la función seno en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ usando los valores en los puntos $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.
La ejecución del algoritmo nos proporciona

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0.000000000000000, \\
c_1 &= 9.549296585513720 \cdot 10^{-1}, \\
c_2 &= -2.086076016196225 \cdot 10^{-1}, \\
c_3 &= -1.364890983089707 \cdot 10^{-1}, \\
c_4 &= 2.879711246041393 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}$$

En la figura se aprecia el resultado obtenido con el polinomio (en rojo).



2.2.3. Error en la interpolación mediante polinomios.

Vamos a ver un teorema que nos permitirá evaluar el error que se comete al interpolar una función mediante un polinomio.

Teorema. *Sea una función continua y con derivadas continuas hasta orden $n+1$ en el intervalo $[a,b]$, $f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$ y sea $p_n(x)$ un polinomio de grado, a lo sumo, n que interpola a $f(x)$ en $n+1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in [a,b]$. Entonces para cada $t \in [a,b]$ existe un $\xi_t \in (a,b)$ tal que*

$$f(t) - p_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_t) \prod_{k=0}^{n} (t - x_k)\,.$$

Demostración. Es evidente que si $t = x_k,\ k = 0, 1, \ldots n$, la demostración es trivial ya que los dos miembros de la anterior ecuación se hacen 0. Consideremos ahora la función

$$\phi(x) = f(x) - p_n(x) - \lambda w(x)\,,$$

donde

$$w(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

y λ es un número real definido como

$$\lambda = \frac{f(t) - p_n(t)}{w(t)}\,,$$

para cada valor de t, es decir, que λ es tal que $\phi(t) = 0$. Por construcción, $\phi(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$ y se anula en $n+2$ puntos del intervalo $[a,b]$, a saber los $n+1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y el punto t. En tal caso, el teorema de Rolle nos asegura que $\phi'(x)$ (la derivada primera de $\phi(x)$) tiene al menos $n+1$ ceros distintos en el intervalo (a,b), que $\phi''(x)$ (la derivada segunda de $\phi(x)$) tiene al menos n ceros distintos en el intervalo (a,b) y que $\phi^{(n+1)}(x)$ (la derivada de orden $n+1$ de $\phi(x)$) tiene al menos un cero en el intervalo (a,b). Llamemos $\xi_t \in (a,b)$ a ese cero. Como

$$\phi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p_n^{(n+1)}(x) - \lambda w^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \lambda (n+1)!\,,$$

ya que $p_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$ y $w^{(n+1)}(x) \equiv (n+1)!$, entonces podemos escribir que

$$\phi^{(n+1)}(\xi_t) = f^{(n+1)}(\xi_t) - \lambda(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi_t) - (n+1)!\,\frac{f(t) - p_n(t)}{w(t)} = 0\,,$$

lo que demuestra el teorema.

Ejemplo:
Supongamos que interpolamos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en diez puntos en el intervalo $[0, 1]$ mediante un polinomio de grado 9. ¿Cuál es el error cometido? De acuerdo con el teorema anterior,

$$\operatorname{sen} t - p_9(t) = \frac{1}{10!} \operatorname{sen}^{(10)} \xi_t \prod_{k=0}^{9} (t - x_k) .$$

Ahora bien,

$$\left| \operatorname{sen}^{(10)} \xi_t \right| = |\operatorname{sen} \xi_t| \leq 1$$

y

$$\left| \prod_{k=0}^{9} (t - x_k) \right| = \prod_{k=0}^{9} |t - x_k| \leq 1$$

ya que $x_k \in [0, 1]$, y, por tanto,

$$|\operatorname{sen} t - p_9(t)| \leq \frac{1}{10!} = 2.8 \cdot 10^{-7} .$$

2.2.4. Otros algoritmos.

Los algoritmos aquí vistos no son los únicos que existen para resolver el problema planteado. Pero lo que sí que hay que tener presente es que todos generan el mismo polinomio que, como ya demostramos anteriormente, es único. La opción más intuitiva, y que no hemos considerado hasta ahora, es suponer que el polinomio $p_n(x)$ viene dado como

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n .$$

Ahora habría que determinar los coeficientes $\{a_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$. Como el polinomio debe verificar $p_n(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$, tenemos $n + 1$ ecuaciones lineales que constituyen un sistema que podemos escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matriz de las potencias de los valores $\{x_k,\ k = 0, 1, \dots, n\}$ se conoce como matriz de Vandermonde. Esta matriz no es singular. Esto lo podemos asegurar porque el teorema demostrado antes nos garantiza la existencia de una solución única del problema de interpolación para cualquier elección de los valores $\{y_k,\ k = 0, 1, \dots, n\}$. En efecto, podemos demostrar que el determinante de esa matriz viene dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < k \le n} (x_k - x_j)\,,$$

y como los valores $\{x_k,\ k = 0, 1, \dots, n\}$ son todos distintos, el determinante siempre será distinto de 0. La demostración es sencilla si la hacemos por inducción. Evidentemente, el resultado es válido en el caso $n = 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)\,.$$

Para $n = 2$ también es fácil ver que se cumple:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{vmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ 1 & x_2 + x_0 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Ahora lo suponemos válido para $n-1$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<k\leq n} (x_k - x_j)\,,$$

y lo demostramos para n. Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por

$$\prod_{1\leq k\leq n} (x_k - x_0)$$

tenemos

$$\prod_{0\leq j<k\leq n} (x_k - x_j) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \times \prod_{1\leq k\leq n} (x_k - x_0)$$

Ahora transformamos el determinante de forma tal que a la columna j-ésima le sumamos la columna anterior multiplicada por x_0, empezando con la columna $j=2$. Así resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & S_1(x_1) & S_2(x_1) & \dots & S_{n-1}(x_1) \\ 1 & S_1(x_2) & S_2(x_2) & \dots & S_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & S_1(x_n) & S_2(x_n) & \dots & S_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} S_1(x_k) &= x_k + x_0 \\ S_2(x_k) &= x_k^2 + x_k x_0 + x_0^2 \\ &\dots \\ S_m(x_k) &= \sum_{i=0}^{m} x_k^{m-i} x_0^i \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
(x_k - x_0)\, S_m(x_k) &= \sum_{i=0}^{m} x_k^{m-i+1} x_0^i - \sum_{i=0}^{m} x_k^{m-i} x_0^{i+1} \\
&= x_k^{m+1} + \sum_{i=1}^{m} x_k^{m-i+1} x_0^i - \sum_{i=0}^{m-1} x_k^{m-i} x_0^{i+1} - x_0^{m+1} \\
&= x_k^{m+1} - x_0^{m+1}\,,
\end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned}
\prod_{0\le j<k\le n} (x_k - x_j) &= \begin{vmatrix} 1 & S_1(x_1) & S_2(x_1) & \dots & S_{n-1}(x_1) \\ 1 & S_1(x_2) & S_2(x_2) & \dots & S_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & S_1(x_n) & S_2(x_n) & \dots & S_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} \times \prod_{1\le k\le n} (x_k - x_0) \\
&= \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & \dots & x_2^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & x_n^3 - x_0^3 & \dots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & \dots & x_2^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & x_n^3 - x_0^3 & \dots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}\,,
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el resultado buscado.

Este método de interpolación no es, sin embargo, muy eficiente (el número de operaciones que es necesario realizar es mayor que en los otros dos procedimientos estudiados) y, por otra parte, los coeficientes del polinomio pueden no quedar determinados con precisión.

2.3. Diferencias divididas.

El problema de interpolación polinómica siguiendo la forma de Newton no suele abordarse con el algoritmo indicado antes. Partimos de la ecuación

$$p_l(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{l} c_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

e introducimos la función

$$q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)\,,$$

con $q_0(x) = 1$. Entonces tenemos

$$p_l(x) = \sum_{k=0}^{l} c_k q_k(x)\,.$$

Las condiciones en los puntos de interpolación nos permiten escribir

$$\sum_{k=0}^{l} c_k q_k(x_i) = f(x_i)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,,$$

que es un sistema de ecuaciones caracterizado por una matriz triangular

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & f(x_0) \\ c_0 + c_1(x_1 - x_0) & = & f(x_1) \\ c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & = & f(x_2) \\ \cdots & & \cdots\,, \end{array}$$

que podemos resolverlo de forma recursiva. Como vemos c_0 sólo depende de $f(x_0)$, c_1 depende de $f(x_0)$ y $f(x_1)$, etc. Por tanto, c_n depende del valor de $f(x)$ en todos los puntos $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$. Esta dependencia del coeficiente c_j la expresamos como

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j]\,.$$

Las cantidades $f[x_0, x_1, \ldots, x_j]$ se denominan diferencias divididas de la función $f(x)$ y son los coeficientes de x^j en el polinomio de, a lo sumo, grado j que interpola a $f(x)$ en los puntos $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, j\}$. Evidentemente,

$$f[x_0] = c_0 = f(x_0)\,.$$

A partir de este valor y de la segunda ecuación del sistema tendremos

$$f[x_0, x_1] = c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \,,$$

expresión que nos da idea de la razón de la denominación de diferencias divididas. La siguiente será

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] = c_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0) - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1) - f[x_0, x_1](x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)} \,. \end{aligned}$$

Teorema. *Las diferencias divididas satisfacen la relación*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \,.$$

Demostración. Sean $p_n(x)$ el polinomio de grado, a lo sumo, n que interpola a $f(x)$ en los puntos $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$, $p_{n-1}(x)$ el de grado, a lo sumo, $n-1$ que lo hace en los puntos $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ y $q_{n-1}(x)$ el de grado, a lo sumo, $n-1$ que lo hace en los puntos $\{x_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos ahora el polinomio

$$s_n(x) = q_{n-1}(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0} \left[q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x) \right] \,.$$

Este polinomio es de orden, a lo sumo, n y es fácil comprobar que cumple

$$s_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, n \,,$$

es decir, que interpola a $f(x)$ en los mismos puntos que lo hace $p_n(x)$. Como éste es único, es obvio que $s_n(x)$ coincide con $p_n(x)$. El coeficiente de x^n en $p_n(x)$ es, obviamente, $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, mientras que en el polinomio $s_n(x)$ es

$$\frac{1}{x_n - x_0} \left\{ f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] \right\} \,,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Ejemplo:
Utilizar las diferencias divididas para calcular el polinomio que interpola los siguientes puntos $\{(x_k, y_k) = (3,1), (1,-3), (5,2), (6,4)\}$.
A la hora de hacer los cálculos, es conveniente organizar los datos iniciales y las sucesivas diferencias divididas en forma de tabla como sigue:

$$\begin{array}{cc|lll} x_0 & f[x_0] & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ x_1 & f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_2,x_3] & & \\ x_3 & f[x_3] & & & \end{array}$$

En este caso, tendremos

$$\begin{array}{cr|lll} 3 & 1 & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ 1 & -3 & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] & \\ 5 & 2 & f[x_2,x_3] & & \\ 6 & 4 & & & \end{array} .$$

Las diferencias divididas de orden dos valen

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1] &= \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{-3-1}{1-3} = 2 \\ f[x_1,x_2] &= \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{2+3}{5-1} = \frac{5}{4} \\ f[x_2,x_3] &= \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} = \frac{4-2}{6-5} = 2\,, \end{aligned}$$

las de tercer orden

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{5/4-2}{5-3} = -\frac{3}{8} \\ f[x_1,x_2,x_3] &= \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = \frac{2-5/4}{6-1} = \frac{3}{20}\,, \end{aligned}$$

y, por último, la de cuarto orden es

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{3/20-3/8}{6-3} = \frac{7}{40}\,.$$

La tabla nos queda por tanto

$$\begin{array}{rr|rrr} 3 & 1 & 2 & -3/8 & 7/40 \\ 1 & -3 & 5/4 & 3/20 & \\ 5 & 2 & 2 & & \\ 6 & 4 & & & \end{array},$$

con lo que el polinomio de interpolación es

$$p_3(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)\,.$$

Ejemplo:
Considerar los valores $\{(x_k, y_k) = (5,1), (-7,-23), (-6,-54), (0,-954)\}$. Calcular el polinomio de interpolación de orden 3 usando las diferencias divididas. Las diferencias divididas valen

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1] &= \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{-23-1}{-7-5} = 2 \\ f[x_1,x_2] &= \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{-54+23}{-6+7} = -31 \\ f[x_2,x_3] &= \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} = \frac{-954+54}{0+6} = -150 \\ f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{-31-2}{-6-5} = 3 \\ f[x_1,x_2,x_3] &= \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = \frac{-150+31}{0+7} = -17 \\ f[x_0,x_1,x_2,x_3] &= \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{-17-3}{0-5} = 4\,, \end{aligned}$$

con lo que el polinomio resulta ser, como ya sabíamos,

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1 + 2(x-5) + 3(x-5)(x+7) + 4(x-5)(x+7)(x+6) \\ &= 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954\,. \end{aligned}$$

Si llamamos ahora $s_{ij} = f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}]$ podemos construir un algoritmo simple para calcular las diferencias divididas en el que los datos de entrada son los valores $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots n\}$ y los valores $s_{k0} = f(x_k),\ k = 0, 1, \ldots n$. Aún se puede mejorar el algoritmo utilizando un vector, en lugar de una matriz, en el que se hace inicialmente $d_k = f(x_k),\ k = 0, 1, \ldots n$ y, al final, en el vector esán las $n + 1$ diferencias divididas requeridas para reconstruir el polinomio.

El método de las diferencias divididas tiene como principal ventaja respecto al inicialmente visto que el número de operaciones es menor, siendo más importante la reducción a medida que el número de puntos de interpolación aumenta.

Teorema. *Las diferencias divididas son funciones simétricas de sus argumentos. Si $\{z_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$ es una permutación de $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$,*

$$f[z_0, z_1, \ldots, z_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,.$$

Demostración. La demostración es trivial. En efecto, $f[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ es el coeficiente de x^n en el polinomio de grado, a lo sumo n, que interpola la función $f(x)$ en los puntos $\{z_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$. Y $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ es el coeficiente de x^n en el polinomio de grado, a lo sumo, n que interpola la función $f(x)$ en los puntos $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$. Como quiera que los puntos son los mismos, ambos polinomios coinciden y la igualdad se cumple.

Teorema. *Sea $p_n(x)$ el polinomio de grado, a lo sumo, n que interpola a la función $f(x)$ en los puntos $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$. Si t es un punto que cumple que $t \neq x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$, entonces*

$$f(t) - p_n(t) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)\,.$$

Demostración. De nuevo, la demostración es trivial. Si $q_{n+1}(x)$ es un polinomio de grado, a lo sumo, $n + 1$ que interpola a $f(x)$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, t\}$, entonces

$$q_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)\,.$$

Teniendo en cuenta que $q_{n+1}(t) = f(t)$ y haciendo $x = t$ en la ecuación anterior resulta

$$f(t) = p_n(t) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)\,,$$

lo que demuestra el teorema.

Teorema. *Si $f(x) \in C^{(n)}[a, b]$ es una función continua y con n derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$ y $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$ son $n + 1$ puntos distintos de ese intervalo, entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)\,.$$

Demostración. Sea $p_{n-1}(x)$ el polinomio de grado, a lo sumo, $n - 1$ que interpola a $f(x)$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Entonces

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

y, por otra parte,

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)\,.$$

Comparando ambas expresiones queda demostrado el teorema.

2.4. Interpolación de Hermite.

Se conoce como interpolación de Hermite a la interpolación que involucra a una función y a alguna de sus derivadas en un conjunto de puntos. Esto incluye un conjunto de problemas de interpolación muy general, pero aquí vamos a estudiar sólo uno de ellos.

Supongamos que conocemos los valores de una función $f(x)$ y de su primera derivada $f'(x)$ en un conjunto de puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$$f(x_k) = y_k,\ \ f'(x_k) = y'_k,\ \ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Tratamos de encontrar un polinomio $p(x)$ tal que

$$p(x_k) = y_k,\ \ p'(x_k) = y'_k,\ \ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Como tenemos $2n+2$ condiciones, podemos construir un polinomio de grado, a lo sumo, $2n+1$. Para ello seguiremos una estrategia similar a la de la forma de Lagrange anteriormente estudiada. El polinomio lo escribimos como

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j A_j(x) + \sum_{j=0}^{n} y_j' B_j(x)\,,$$

donde $A_j(x)$ y $B_j(x)$ son polinomios de grado, a lo sumo, $2n+1$ que dependen de los puntos $\{x_k,\ k = 0, 1, \dots, n\}$ pero no de los valores de $f(x)$ y de $f'(x)$ en dichos puntos. Es fácil comprobar que si estos polinomios satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} A_j(x_k) &= \delta_{jk}\,, \qquad & B_j(x_k) &= 0\,, \\ A_j'(x_k) &= 0\,, \qquad & B_j'(x_k) &= \delta_{jk}\,, \end{aligned}$$

entonces el polinomio $p(x)$ será el polinomio buscado. Si ahora recordamos los polinomios $l_j(x)$

$$l_j(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k},\ \ j = 0, 1, \dots, n\,,$$

podemos proponer para $A_j(x)$ y $B_j(x)$ las formas

$$\begin{aligned} A_j(x) &= \left[1 - 2(x-x_j)l_j'(x_j)\right] l_j^2(x)\,, \\ B_j(x) &= (x-x_j)l_j^2(x)\,. \end{aligned}$$

Como $l_j(x)$ es de grado n, $A_j(x)$ y $B_j(x)$ son polinomios de grado $2n+1$ y, por tanto, $p(x)$ es de grado, a lo sumo, $2n+1$, como queríamos. Por otro lado, como $l_j(x_k) = \delta_{jk}$, resulta que

$$\begin{aligned} A_j(x_k) &= \left[1 - 2(x_k-x_j)l_j'(x_j)\right] l_j^2(x_k) = \delta_{jk}\,, \\ B_j(x_k) &= (x_k-x_j)l_j^2(x_k) = 0\,. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} A_j'(x) &= -2l_j'(x_j)l_j^2(x) + \left[1 - 2(x-x_j)l_j'(x_j)\right] 2l_j(x)l_j'(x)\,, \\ B_j'(x) &= l_j^2(x) + (x-x_j)2l_j(x)l_j'(x)\,, \end{aligned}$$

con lo que

$$
\begin{aligned}
A_j'(x_k) &= -2l_j'(x_j)l_j^2(x_k) + \left[1 - 2(x_k - x_j)l_j'(x_j)\right] 2l_j(x_k)l_j'(x_k) \\
&= -2l_j'(x_j)\delta_{jk} + \left[1 - 2(x_k - x_j)l_j'(x_j)\right] 2l_j'(x_k)\delta_{jk} \\
&= \begin{cases} 0\,, & k \neq j \\ -2l_j'(x_j) + 2l_j'(x_j) = 0\,, & k = j\,, \end{cases} \\
B_j'(x_k) &= l_j^2(x_k) + (x_k - x_j)2l_j(x_k)l_j'(x_k) \\
&= \delta_{jk} + 2(x_k - x_j)l_j'(x_k)\delta_{jk} \\
&= \begin{cases} 0\,, & k \neq j \\ 1\,, & k = j\,, \end{cases}
\end{aligned}
$$

verificándose las condiciones antes impuestas.

A continuación se demuestra un teorema que proporciona una fórmula para el error asociado a este tipo de interpolación de Hermite.

Teorema. *Sea una función continua y con derivadas continuas hasta orden* $2n+2$ *en el intervalo* $[a,b]$, $f(x) \in C^{(2n+2)}[a,b]$ *y sea* $p(x)$ *un polinomio de grado, a lo sumo,* $2n+1$ *que verifica que*

$$p(x_k) = f(x_k)\,,\ \ p'(x_k) = f'(x_k)\,,\ \ 0 \leq k \leq n\,.$$

Entonces para cada $t \in [a,b]$ *existe un* $\xi_t \in (a,b)$ *tal que*

$$f(t) - p(t) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_t) \prod_{k=0}^{n} (t - x_k)^2\,.$$

Demostración. Es evidente que si $t = x_k,\ k = 0, 1, \ldots\ n$, la demostración es trivial ya que los dos miembros de la anterior ecuación se hacen 0. Consideremos ahora la función

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t)\,,$$

donde

$$w(t) = \prod_{k=0}^{n} (t - x_k)^2$$

y λ es un número real definido como

$$\lambda = \frac{f(t) - p(t)}{w(t)}\,,$$

es decir, que λ es tal que $\phi(t) = 0$. Por construcción, $\phi(x) \in C^{(2n+2)}[a, b]$ y se anula en $n+2$ puntos del intervalo $[a, b]$, a saber los $n+1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y el punto t. En tal caso, el teorema de Rolle nos asegura que $\phi'(x)$ (la derivada primera de $\phi(x)$) tiene al menos $n+1$ ceros distintos en el intervalo (a, b) y distintos de los $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$ donde $\phi'(x)$ también se anula. Por tanto, $\phi'(x)$ tiene $2n + 2$ ceros en (a, b). Aplicando sucesivamente el teorema de Rolle, podemos asegurar que $\phi''(x)$ (la derivada segunda de $\phi(x)$) tiene al menos $2n + 1$ ceros distintos en el intervalo (a, b) y que $\phi^{(2n+2)}(x)$ (la derivada de orden $2n + 2$ de $\phi(x)$) tiene al menos un cero en el intervalo (a, b). Llamemos $\xi_t \in (a, b)$ a ese cero. Ahora bien, $p(x)$ es un polinomio de grado, a lo sumo, $2n + 1$ por lo que $p^{(2n+2)}(x) = 0$. Por otro lado, el término con la potencia más alta en t de $w(t)$ es t^{2n+2} y, por tanto, $w^{(2n+2)} = (2n + 2)!$. Podemos escribir entonces

$$\phi^{(2n+2)}(x) = f^{(2n+2)}(x) - p^{(2n+2)}(x) - \lambda w^{(2n+2)}(x) = f^{(2n+2)}(x) - \lambda(2n + 2)!\,,$$

y, particularizando para ξ_t, tenemos

$$\phi^{(2n+2)}(\xi_t) = 0 = f^{(2n+2)}(\xi_t) - \lambda(2n + 2)! = f^{(2n+2)}(\xi_t) - (2n + 2)!\,\frac{f(t) - p(t)}{w(t)}\,,$$

lo que demuestra el teorema.

Ejemplo:
Utilizar la interpolación de Hermite para determinar el valor de la función $f(x)$ en el punto $x = 1.5$, sabiendo que los valores de esa función y de su derivada en los puntos $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ son $f(x_0) = 2$, $f'(x_0) = 3$, $f(x_1) = 6$ y $f'(x_1) = 7$. Como tenemos dos puntos, el polinomio que buscamos es de grado, a lo sumo, $2n + 1 = 3$. El polinomio buscado será

$$p(x) = \sum_{j=0}^{1} y_j A_j(x) + \sum_{j=0}^{1} y'_j B_j(x)\,,$$

con

$$\begin{aligned} A_j(x) &= \left[1 - 2(x - x_j) l'_j(x_j)\right] l_j^2(x)\,, \\ B_j(x) &= (x - x_j) l_j^2(x) \end{aligned}$$

y con los polinomios $l_j(x)$ dados por

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,,\ \ l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,.$$

Particularizando para nuestro caso,

$$l_0(x) = 2 - x\,,\;\; l_1(x) = x - 1\,,$$

y

$$l_0'(x) = -1\,,\;\; l_1'(x) = 1\,,$$

con lo que

$$\begin{aligned}
A_0(x) &= [1 + 2(x-1)]\,(2-x)^2\,,\\
A_1(x) &= [1 - 2(x-2)]\,(x-1)^2\,,\\
B_0(x) &= (x-1)(2-x)^2\,,\\
B_1(x) &= (x-2)(x-1)^2\,.
\end{aligned}$$

El polinomio de interpolación queda, finalmente,

$$p(x) = 2A_0(x) + 6A_1(x) + 3B_0(x) + 7B_1(x)\,.$$

Y en el punto buscado, el polinomio proporciona

$$p(1.5) = 3.5\,.$$

Aquí no podemos estimar el error ya que no conocemos la función $f(x)$.

2.5. Interpolación mediante *splines*.

Como hemos visto, dada una función $f(x)$ cuyos valores en un número $n+1$ de puntos $\{x_k,\, k = 0, 1, \ldots, n\}$ son conocidos, existe un polinomio único de grado, a lo sumo, n que interpola dicha función. Sin embargo, la experiencia demuestra que, en muchos casos, el polinomio determinado no siempre proporciona una buena descripción de la función. De hecho, al forzar que el polinomio reproduzca los valores de la función en los puntos x_k se pueden producir variaciones importantes del polinomio y de los valores de éste en los puntos del intervalo de interpolación cuando se producen pequeñas variaciones de los valores de la función a interpolar en los puntos x_k. Veamos un ejemplo.

Ejemplo:
Supongamos una función $f(x)$ de la que se conoce que se anula en los puntos $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.1$ y $x_3 = 2$.
Es fácil comprobar que el polinomio que interpola la función en esos puntos es $p(x) = 0$. Cambiemos el valor de la fución en x_2: $f(x_2) = -0.798$. Ahora el polinomio lo podemos determinar con el procedimiento de las diferencias divididas:

$$\begin{array}{rr|rrr} -2 & 0 & 0 & -3.8 & 2 \\ 0 & 0 & \text{-7.98} & 4.2 & \\ 0.1 & -0.798 & 0.42 & & \\ 2 & 0 & & & \end{array} ,$$

con lo que el polinomio de interpolación es

$$p_3(x) = 0 + 0(x+2) - 3.8(x+2)x + 2(x+2)x(x-0.1) = 2x^3 - 8x\,.$$

En este caso es importante notar cómo en los puntos $x = \pm 1$ el polinomio da los valores $p(\pm 1) = \pm 6$.

Por otra parte, es evidente que al aumentar el número de puntos de interpolación, el grado del polinomio de interpolación crecerá y podrán producirse los problemas que acabamos de ver con más facilidad. Además, parece lógico pensar que el valor de la función a interpolar en un punto alejado de otro dado puede influir poco en la forma del polinomio alrededor de este último. Este tipo de problemas ha llevado a la formulación de la interpolación mediante *splines*.

Una función *spline* es una función que está formada por varios polinomios, cada uno de ellos definidos en un subintervalo del intervalo global de interpolación, que se unen entre sí de acuerdo a ciertas condiciones de continuidad. Supongamos que se han especificado $n+1$ puntos ordenados de menor a mayor, que definen un intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\,.$$

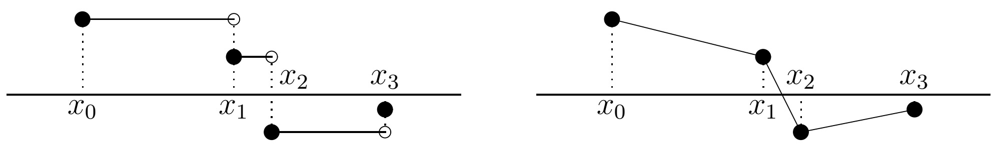
Una función *spline* de grado m (con $m \geq 0$) con nodos $\{x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$ es una función $S(x)$ definida en $[a, b]$ que cumple las siguientes condiciones

1. $S(x)$ es un polinomio de grado $\leq m$ en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k)$, y

2. $S(x)$ y sus derivadas hasta orden $m-1$ son continuas en $[a,b]$.

En otras palabras, $S(x)$ es un polinomio de grado, a lo sumo, m continuo a trozos y con derivadas continuas hasta orden $m-1$.

Ejemplo:
Supongamos una función $f(x)$ de la que se conoce que en los puntos $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$ y $x_3 = 2$ toma los valores $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0.5$, $f(x_2) = -0.5$ y $f(x_3) = -0.2$.
En las figuras se muestran dos ejemplos de *splines* de grados 0 y 1.



2.5.1. *Splines* cúbicos.

Los *splines* cúbicos ($m = 3$) son muy utilizados ya que presentan unas buenas propiedades de “suavidad” en las gráficas. Vamos a estudiar ahora cómo se construyen y algunas cuestiones teóricas al respecto.

Supongamos que conocemos los valores de una función $f(x)$ en un conjunto de puntos $\{x_k,\ k = 0,1,\ldots,n\}$, que denominamos $y_k = f(x_k)$. Construyamos un *spline* cúbico, $S(x)$, que interpole a la función $f(x)$ en dichos puntos. El procedimiento impone que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1})$ el *spline* viene representado por un polinomio cúbico diferente

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x)\,, & x \in [x_0, x_1)\,, \\ S_1(x)\,, & x \in [x_1, x_2)\,, \\ S_2(x)\,, & x \in [x_2, x_3)\,, \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x)\,, & x \in [x_{n-1}, x_n)\,. \end{cases}$$

Por convenio se asume que los *splines* S_0 y S_{n-1} son válidos también en los intervalos $(-\infty, x_0)$ y $[x_n, \infty)$, respectivamente.

Como los polinomios $S_{k-1}(x)$ y $S_k(x)$ interpolan a la función $f(x)$ en el mismo punto x_k,

$$S_{k-1}(x_k) = y_k = S_k(x_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

con

$$S_0(x_0) = y_0\,, \quad S_{n-1}(x_n) = y_n\,.$$

Estas son un total de $2n$ condiciones que garantizan la continuidad de $S(x)$ en todo el intervalo de interpolación. Como los polinomios $S_k(x)$ son cúbicos, se necesitan 4 condiciones para fijar cada uno de ellos. Por tanto, son necesarias $4n$ condiciones. Para completar las $2n$ condiciones que proporciona la continuidad de $S(x)$, se imponen otras $2n-2$ condiciones en base a la continuidad de $S'(x)$ y de $S''(x)$:

$$\begin{aligned} S'_{k-1}(x_k) &= S'_k(x_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\ S''_{k-1}(x_k) &= S''_k(x_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \end{aligned}$$

Por tanto, son necesarias 2 condiciones adicionales para poder fijar la función *spline* de forma unívoca. Más adelante haremos uso de estos dos grados de libertad.

Definamos

$$z_k = S''(x_k)\,, \; k = 0, 1, \ldots\, n\,.$$

Como $S''(x)$ es continua en los puntos $\{x_k, \; k = 1, 2, \ldots, n-1\}$, se cumple

$$\lim_{x \to x_k^-} S''(x) = z_k = \lim_{x \to x_k^+} S''(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Ahora bien, $S_k(x)$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 3, y por lo tanto $S''_k(x)$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 1 que debe cumplir

$$S''_k(x_k) = z_k, \,, \quad S''_k(x_{k+1}) = z_{k+1}\,.$$

Por tanto,

$$S''_k(x) = \frac{z_k}{h_k}(x_{k+1} - x) + \frac{z_{k+1}}{h_k}(x - x_k)\,,$$

donde hemos definido

$$h_k = x_{k+1} - x_k\,, \; k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Integrando dos veces esta expresión encontramos

$$S_k(x) = \frac{z_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{z_{k+1}}{6h_k}(x - x_k)^3 + \alpha(x_{k+1} - x) + \beta(x - x_k)\,,$$

donde α y β son constantes de integración que pueden determinarse sin más que imponer las condiciones de interpolación

$$S_k(x_k) = y_k\,,\ \ S_k(x_{k+1}) = y_{k+1}\,.$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} S_k(x_k) = y_k = \frac{z_k}{6h_k}h_k^3 + \alpha h_k \ &\Longrightarrow\ \alpha \ = \ \frac{y_k}{h_k} - \frac{z_k}{6}h_k\,, \\ S_k(x_{k+1}) = y_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{6h_k}h_k^3 + \beta h_k \ &\Longrightarrow\ \beta \ = \ \frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{z_{k+1}}{6}h_k\,. \end{aligned}$$

Por tanto, tendremos finalmente que

$$\begin{aligned} S_k(x) \ &= \ \frac{z_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{z_{k+1}}{6h_k}(x - x_k)^3 \\ &\quad + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{z_{k+1}}{6}h_k\right)(x - x_k) + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{z_k}{6}h_k\right)(x_{k+1} - x)\,. \end{aligned}$$

Esta ecuación puede verificarse comprobando que se cumplen las condiciones de interpolación en x_k y x_{k+1}. Por otro lado es importante señalar que el polinomio puede evaluarse también de la forma

$$S_k(x) = A_k(x - x_k)^3 + B_k(x - x_k)^2 + C_k(x - x_k) + D_k\,,$$

donde

$$\begin{aligned} A_k \ &= \ \frac{1}{6h_k}(z_{k+1} - z_k) \\ B_k \ &= \ \frac{1}{2}z_k \\ C_k \ &= \ \frac{1}{h_k}(y_{k+1} - y_i) - \frac{h_k}{6}(z_{k+1} + 2z_k) \\ D_k \ &= \ y_k \end{aligned}$$

Si ahora tenemos en cuenta esta expresión de $S_k(x)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
S'_{k-1}(x) &= -\frac{z_{k-1}}{2h_{k-1}}(x_k-x)^2+\frac{z_k}{2h_{k-1}}(x-x_{k-1})^2 \\
&\quad +\left(\frac{y_k}{h_{k-1}}-\frac{z_k}{6}h_{k-1}\right)-\left(\frac{y_{k-1}}{h_{k-1}}-\frac{z_{k-1}}{6}h_{k-1}\right), \\
S'_k(x) &= -\frac{z_k}{2h_k}(x_{k+1}-x)^2+\frac{z_{k+1}}{2h_k}(x-x_k)^2 \\
&\quad +\left(\frac{y_{k+1}}{h_k}-\frac{z_{k+1}}{6}h_k\right)-\left(\frac{y_k}{h_k}-\frac{z_k}{6}h_k\right),
\end{aligned}$$

e imponiendo la condición de continuidad de las primeras derivadas,

$$\begin{aligned}
S'_{k-1}(x_k) &= S'_k(x_k) \\
\frac{h_{k-1}}{6}z_{k-1}+\frac{h_{k-1}}{3}z_k-\frac{y_{k-1}}{h_{k-1}}+\frac{y_k}{h_{k-1}} &= -\frac{h_k}{3}z_k-\frac{h_k}{6}z_{k+1}-\frac{y_k}{h_k}+\frac{y_{k+1}}{h_k},
\end{aligned}$$

de donde tendremos

$$h_{k-1}z_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)z_k+h_kz_{k+1}=\frac{6}{h_k}(y_{k+1}-y_k)-\frac{6}{h_{k-1}}(y_k-y_{k-1}).$$

Esta ecuación (que en realidad es un sistema de ecuaciones) nos permite calcular los valores $\{z_k\,,\ k=0,1,\ldots,n\}$ que necesitamos para encontrar la forma de los *splines* $S_i(x)$. Sin embargo, como en dicha ecuación i sólo puede tomar valores entre 1 y $n-1$, disponemos de un sistema de $n-1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. Podemos elegir arbitrariamente dos de ellas y una buena elección es $z_0=z_n=0$ que proporciona como solución la denominada *spline* natural. En tal caso el sistema de ecuaciones podemos escribirlo como

$$\begin{pmatrix}
u_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
h_1 & u_2 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & h_2 & u_3 & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2} & h_{n-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & u_{n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
u_k &= 2(h_k+h_{k-1}), \\
v_k &= b_k-b_{k-1}, \\
b_k &= \frac{6}{h_k}(y_{k+1}-y_k).
\end{aligned}$$

Una forma de resolver este sistema de ecuaciones es mediante el procedimiento denominado "eliminación gaussiana sin pivote".

La denominación *spline* natural que recibe la solución aquí expuesta se debe a que cuando tenemos dos puntos ($n = 1$), el *spline* se reduce a la recta que pasa por ambos puntos.

Ejemplo:
Volvamos con el ejemplo que motivó el estudio de los *splines*. Queremos interpolar una función $f(x)$ que se anula en los puntos $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ y $x_3 = 2$ y que en $x_2 = 0.1$ toma el valor $f(x_2) = -0.798$. El polinomio interpolador calculado mediante el procedimiento de las diferencias divididas es $p(x) = 2x^3 - 8x$.
En este caso tenemos $h_0 = 2$, $h_1 = 0.1$ y $h_2 = 1.9$. El sistema para determinar z_1 y z_2 es el siguiente

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix},$$

que para los valores concretos del problema resulta

$$\begin{pmatrix} 4.2 & 0.1 \\ 0.1 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47.88 \\ 50.40 \end{pmatrix},$$

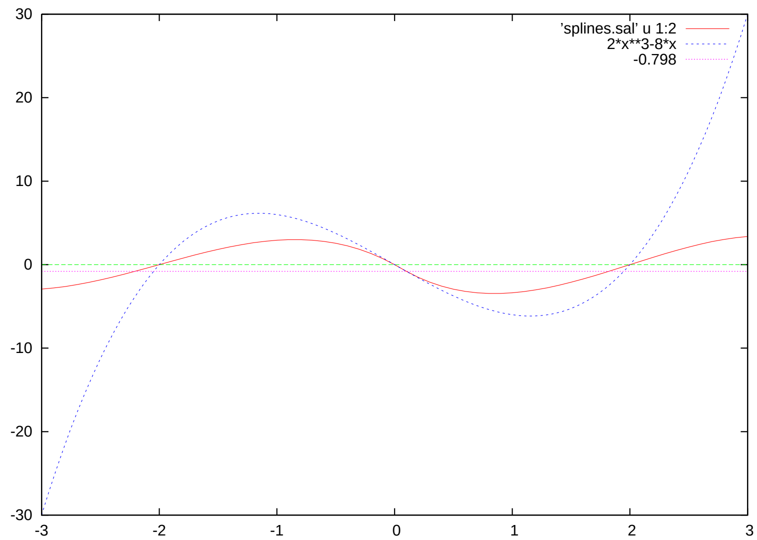
que tiene como solución

$$\begin{aligned} z_1 &= -11.706968433591420 \\ z_2 &= 12.892674210839790\,. \end{aligned}$$

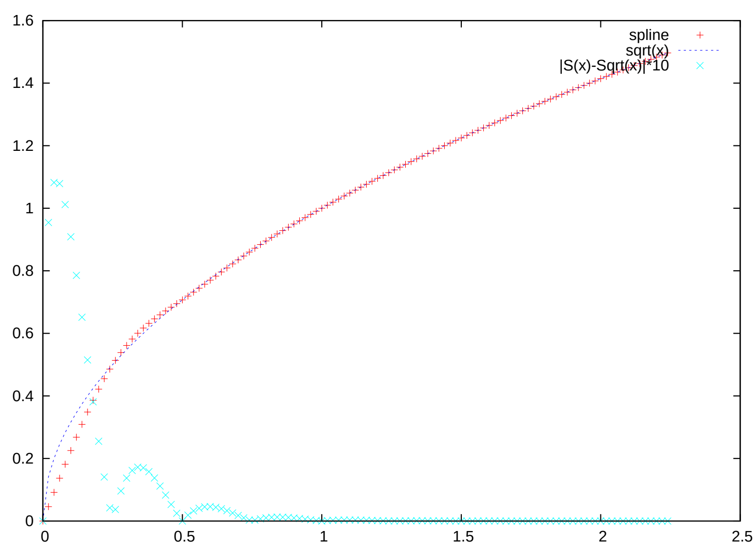
Recordemos que para el *spline* natural $z = 0 = z_3 = 0$. Reconstruyendo los *splines* resulta

$$S(x) = \begin{cases} -0.976(x+2)^3 + 3.902(x+2)\,, & [-\infty, 0) \\ 40.999x^3 - 5.853x^2 - 7.805x\,, & [0, 0.1) \\ -1.131(x-0.1)^3 + 6.446(x-0.1)^2 & \\ \qquad\qquad -7.745(x-0.1) - 0.798\,, & [0.1, \infty) \end{cases}$$

En la figura se compara el resultado de la interpolación mediante *splines* con el polinomio interpolador antes mencionado.



Ejemplo:
Interpolar mediante $splines$ cúbicos la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 2.25]$ considerando 11 nodos de interpolación.
La figura muestra los resultados. Como vemos el $spline$ reproduce la función en los nodos de interpolación. El error cometido es inferior a 0.11, pero los mayores valores se producen en el primer intervalo.



2.6. Interpolación de Fourier.

Cuando la función que pretendemos interpolar es periódica, utilizar polinomios no es lo más adecuado ya que éstos no incorporan la periodicidad. En tal caso es mucho más conveniente utilizar funciones trigonométricas. Supongamos que la función a interpolar tiene período 2π. En este caso es claro que las funciones más convenientes son $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$, con k entero. Un teorema básico del análisis de Fourier es el siguiente

Teorema. *Sea $f(t)$ una función periódica con período 2π, continua y continuamente diferenciable a trozos*[1] *en un intervalo finito cualquiera. Entonces la sucesión de Fourier*

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kt) \;+\; b_k \operatorname{sen}(kt)\right] \,,$$

converge uniformemente a $f(t)$ en dicho intervalo finito. Los coeficientes de la serie vienen dados por

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\, f(t)\, \cos(kt)\,, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\, f(t)\, \operatorname{sen}(kt)\,. \end{aligned}$$

Vamos a utilizar ahora las exponenciales complejas, para lo que recordamos la fórmula de Euler

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\,.$$

Entonces podemos escribir la serie de Fourier como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx)\,,$$

[1] Se dice que una función $f(t)$ es continuamente diferenciable a trozos en un intervalo $[a,b]$ si, y sólo si, su derivada $f'(t)$ existe en todos los puntos del intervalo excepto en un número finito de ellos y es continua a trozos en $[a,b]$. Se dice que una función $f(t)$ es continua a trozos en un intervalo $[a,b]$ si dicho intervalo se puede dividir en un número finito de subintervalos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ tal que $f(t)$ es continua en cada uno de los intervalos abiertos (t_{k-1}, t_k), con $k = 1, 2, \ldots, n$, y existen los límites

$$\lim_{t\to a^+} f(t)\,,\;\; \lim_{t\to t_1^-} f(t)\,,\;\; \lim_{t\to t_1^+} f(t)\;\;\ldots\;\; \lim_{t\to b^-} f(t)\,.$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t f(t) \exp(-ikt) \, .$$

Ahora los coeficientes c_k son complejos y podemos encontrar su relación con los coeficientes a_k y b_k antes utilizados

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t f(t) \left[\cos kt - i \operatorname{sen} kt\right] = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \, .$$

Esto se debe sencillamente a que las funciones $\{E_k(x) = \exp(ikx)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ forman una base ortonormal en el espacio de Hilbert complejo $\mathrm{L}^2[-\pi, \pi]$ cuando se ha definido el producto escalar

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f^*(x) g(x)$$

y, por tanto, se cumple que

$$\langle E_m(x), E_n(x) \rangle = \delta_{mn} \, .$$

Para el problema particular que nos interesa resolver, el de la interpolación de funciones periódicas, es conveniente definir el denominado pseudoproducto escalar

$$\langle f(x), g(x) \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^* \left(\frac{2\pi j}{N} \right) g \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \, .$$

No es un producto escalar ya que si $\langle f(x), f(x) \rangle_N = 0$, entonces $f(2\pi j/N) = 0$ para cualquier valor $j = 0, 1, \ldots, N-1$ y recordemos que para que se trate de un producto escalar verdadero, $f(x)$ debería anularse para cualquier valor de x.

Teorema. *Para cualquier valor $N \geq 1$ resulta*

$$\langle E_n(x), E_k(x) \rangle_N = \begin{cases} 1 \, , & \text{si } \dfrac{|k-n|}{N} \text{ es entero} \, , \\ 0 \, , & \text{si } \dfrac{|k-n|}{N} \text{ no es entero} \, . \end{cases}$$

Demostración. Es evidente que

$$\begin{aligned}
\langle E_n(x), E_k(x)\rangle_N &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\exp\left(-in\frac{2\pi l}{N}\right)\exp\left(ik\frac{2\pi l}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\exp\left[i(k-n)\frac{2\pi l}{N}\right] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\lambda^l\,,
\end{aligned}$$

donde hemos definido

$$\lambda = \exp\left[i(k-n)\frac{2\pi}{N}\right]\,.$$

Si $\dfrac{|k-n|}{N}$ es entero, $\lambda = 1$ y

$$\langle E_n(x), E_k(x)\rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\lambda^l = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}1 = 1\,.$$

Si $\dfrac{|k-n|}{N}$ no es entero, $\lambda \neq 1$ y

$$\langle E_n(x), E_k(x)\rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\lambda^l = \frac{1}{N}\frac{\lambda^N-1}{\lambda-1}\,.$$

Como

$$\lambda^N - 1 = \exp\left[i(k-n)2\pi\right] - 1 = 0\,,$$

resulta que

$$\langle E_n(x), E_k(x)\rangle_N = 0\,,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Ahora es conveniente definir los denominados polinomios exponenciales. Un polinomio exponencial de grado, a lo sumo, N es una función de la forma

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k E_k(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k\exp(ikx) = \sum_{k=0}^{N} c_k\left[\exp(ix)\right]^k\,,$$

donde la última expresión explica el origen del nombre empleado para estos polinomios. La interpolación mediante este tipo de polinomios se basa en algunos resultados que vamos a ver a continuación.

Teorema. *El conjunto de funciones* $\{E_k(x)\,,\ k = 0, 1, \ldots, N-1\}$ *es un conjunto ortonormal respecto al producto pseudoescalar* $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$ *antes definido.*

Demostración. Es evidente que dados dos valores n y k elegidos entre los valores $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, la cantidad

$$\frac{|k-n|}{N}$$

no es en ningún caso un número entero, salvo cuando $k = n$. Por tanto, y de acuerdo con el teorema antes demostrado,

$$\langle E_n(x), E_k(x) \rangle_N = \delta_{nk}\,, \ \ n, k = 0, 1, \ldots, N-1$$

lo que demuestra el teorema.

Corolario. *Dada una función de período 2π y un conjunto de puntos equiespaciados $\{x_l = 2\pi l/N\,,\ l = 0, 1, \ldots, N-1\}$, el polinomio exponencial que interpola dicha función en esos puntos viene dado por*

$$P_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k(x)\,,$$

con $c_k = \langle E_k(x), f(x) \rangle_N$. Además ese polinomio es único.
Demostración. Para ello basta comprobar que se cumplen las condiciones de interpolación que se impusieron al principio de este capítulo. Consideremos un punto arbitrario x_n del conjunto de nodos considerado. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} P_{N-1}(x_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \langle E_k(x), f(x) \rangle_N E_k(x_n) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} E_k^*(x_l) f(x_l) E_k(x_n) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E_k^*(x_l) E_k(x_n)\,. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$E_k(x_n) = \exp(ikx_n) = \exp\left(ik\frac{2\pi n}{N}\right) = \exp\left(in\frac{2\pi k}{N}\right) = \exp(inx_k) = E_n(x_k)\,,$$

y, de forma análoga, podemos demostrar que $E_k^*(x_l) = E_l^*(x_k)$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
P_{N-1}(x_n) &= \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E_k^*(x_l) E_k(x_n) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E_l^*(x_k) E_n(x_k) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \langle E_l(x), E_n(x) \rangle_N \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \delta_{nl} = f(x_n)\,,
\end{aligned}
$$

lo que demuestra la primera parte del corolario.

Para demostrar que es el polinomio es único, supongamos que existe otro polinomio

$$
Q_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k E_k(x)\,,
$$

que interpola la función $f(x)$ en los mismos puntos que lo hace $P_{N-1}(x)$. Entonces

$$
Q_{N-1}(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k E_k(x_n) = f(x_n)\,, \;\; n = 0, 1, \ldots, N-1\,.
$$

A partir de aquí podemos escribir que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E_n^*(x_n) f(x_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E_n^*(x_n) E_k(x_n) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \langle E_n(x), E_k(x) \rangle_N = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta_{nk} = a_n\,,
\end{aligned}
$$

y, por otra parte,

$$
\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E_n^*(x_n) f(x_n) = \langle E_n(x), f(x) \rangle_N = c_n\,,
$$

con lo que queda demostrado que los polinomios $P_{N-1}(x)$ y $Q_{N-1}(x)$ coinciden.

Ejemplo:
Calcular la forma explícita del polinomio de interpolación para $N = 2$.

En este caso hemos de calcular el polinomio exponencial de orden 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1 \exp(ix)\,.$$

Los coeficientes c_k vienen dados por

$$c_k = \langle E_k(x), f(x) \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} E_k^* \left(\frac{2\pi l}{N} \right) f \left(\frac{2\pi l}{N} \right) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f \left(\frac{2\pi l}{N} \right) (\lambda_k)^l\,,$$

con $\lambda_k = \exp\left(-i\dfrac{2\pi k}{N}\right)$. Según esto

$$\lambda_0 = 1\,, \;\; \lambda_1 = \exp(-i\pi) = -1\,,$$

y entonces,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}\left[f(0) + f(\pi)\right] \\ c_1 &= \frac{1}{2}\left[f(0) - f(\pi)\right]\,. \end{aligned}$$

La determinación del polinomio interpolador en este caso implica calcular N coeficientes c_k y para cada uno de ellos es necesario hacer N multiplicaciones seguidas de N sumas. Por tanto el costo computacional en la evaluación de dicho polinomio de interpolación es del orden de N^2. Este costo se reduce a $N \log_2 N$ si se utiliza la denominada transformada rápida de Fourier o FFT (*Fast Fourier Transform*). Este algoritmo se basa en el siguiente teorema.

Teorema. *Sean $P_{N-1}(x)$ y $Q_{N-1}(x)$ dos polinomios exponenciales de grado, a lo sumo, $N-1$ que satisfacen*

$$P_{N-1}(x_{2k}) = f(x_{2k})\,, \;\; Q_{N-1}(x_{2k}) = f(x_{2k+1})\,, \;\; k = 0, 1, \ldots N-1\,.$$

Entonces

$$S_{2N-1}(x) = \frac{1 + E_N(x)}{2} P_{N-1}(x) + \frac{1 - E_N(x)}{2} Q_{N-1}\left(x - \frac{\pi}{N}\right)$$

es un polinomio exponencial de grado, a lo sumo, $2N-1$ que interpola la función $f(x)$ en los puntos $\{x_k\,,\; k = 0, 1, \ldots, 2N-1\}$.

Demostración. Como $P_{N-1}(x)$ y $Q_{N-1}(x)$ son polinomios exponenciales de grado, a lo sumo, $N-1$, y $E_N(x)$ es de grado N, es evidente que $S_{2N-1}(x)$ es de grado, a lo sumo, $2N-1$. Por otra parte, en los puntos de interpolación resulta

$$S_{2N-1}(x_k) = \frac{1+E_N(x_k)}{2}P_{N-1}(x_k) + \frac{1-E_N(x_k)}{2}Q_{N-1}\left(x_k - \frac{\pi}{N}\right)\,,$$

para $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Ahora bien,

$$E_N(x_k) = \exp(iNx_k) = \exp\left(iN\frac{\pi k}{N}\right) = \exp(i\pi k) = \begin{cases} +1\,, & k \text{ par} \\ -1\,, & k \text{ impar} \end{cases}$$

Por tanto,

$$S_{2N-1}(x_k) = \begin{cases} P_{N-1}(x_k) = f(x_k)\,, & k \text{ par} \\ Q_{N-1}\left(x_k - \dfrac{\pi}{N}\right) = Q_{N-1}(x_{k-1}) = f(x_k)\,, & k \text{ impar}\,, \end{cases}$$

lo que demuestra el teorema.

Los coeficientes del polinomio de interpolación pueden calcularse mediante un sencillo algoritmo. En efecto, supongamos que

$$\begin{aligned} P_{N-1}(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k E_k(x)\,, \\ Q_{N-1}(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k E_k(x)\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$S_{2N-1}(x) = \frac{1+E_N(x)}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k E_k(x) + \frac{1-E_N(x)}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\beta_k E_k\left(x - \frac{\pi}{N}\right)\,.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} E_k\left(x - \frac{\pi}{N}\right) &= \exp\left[ik\left(x - \frac{\pi}{N}\right)\right] = \exp\left(-ik\frac{\pi}{N}\right)\exp(ikx) \\ &= \exp\left(-ik\frac{\pi}{N}\right)E_k(x) \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} S_{2N-1}(x) &= \frac{1+E_N(x)}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k E_k(x) + \frac{1-E_N(x)}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\beta_k \exp\Big(-ik\frac{\pi}{N}\Big)E_k(x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\Big\{\Big[\alpha_k + \beta_k \exp\Big(-ik\frac{\pi}{N}\Big)\Big]\, E_k(x) \\ &\qquad + \Big[\alpha_k - \beta_k \exp\Big(-ik\frac{\pi}{N}\Big)\Big]\, E_{k+N}(x)\Big\}\,, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $E_m(x)E_n(x) = E_{m+n}(x)$. Si ahora suponemos que

$$S_{2N-1}(x) = \sum_{k=0}^{2N-1}\gamma_k E_k(x)\,,$$

es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{2}\alpha_k + \frac{1}{2}\exp\Big(-ik\frac{\pi}{N}\Big)\,\beta_k\,, \\ \gamma_{k+N} &= \frac{1}{2}\alpha_k - \frac{1}{2}\exp\Big(-ik\frac{\pi}{N}\Big)\,\beta_k\,, \end{aligned}$$

con $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Ejemplo:
Calcular la forma explícita del polinomio de interpolación para $N = 1$.
En este caso hemos de calcular el polinomio $S_1(x)$, cuyos coeficientes son

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0)\,, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 - \beta_0)\,.$$

Los puntos de interpolación son $x_0 = 0$ y $x_1 = \pi$, con lo que

$$\begin{aligned} P(x_0) &= \alpha_0 E_0(0) = \alpha_0 \equiv f(x_0) = f(0)\,, \\ Q(x_0) &= \beta_0 E_0(0) = \beta_0 \equiv f(x_1) = f(\pi)\,. \end{aligned}$$

Entonces, el polinomio es

$$S_1(x) = \gamma_0 E_0(x) + \gamma_1 E_1(x) = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(\pi)\right] + \frac{1}{2}\left[f(0) - f(\pi)\right]\exp(ix)\,,$$

que coincide con el resultado obtenido antes.

2.7. Teoría de mínimos cuadrados.

Vamos a abordar ahora el problema de la aproximación de funciones en el que, como ya dijimos al principio, no se imponen las condiciones de reproducción de la función a interpolar en un número dado de puntos.

2.7.1. Teorema de Weierstrass para la aproximación polinómica.

Teorema. *Sea $f(x)$ una función continua y acotada en el intervalo finito $[a, b]$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ dado, existe un polinomio de grado n, $p_n(x)$, que cumple*

$$|f(x) - p_n(x)| < \epsilon\,, \quad x \in [a, b]\,.$$

Este teorema se conoce como teorema de Weierstrass y nos dice que es posible aproximar una función mediante un polinomio tanto como uno quiera.

Demostración. Para demostrar este teorema vamos a considerar que el intervalo de definición de la función es $[0, 1]$. Esto no supone pérdida de generalidad ya que siempre es posible realizar un cambio de variable que me lleve un punto $x \in [a, b]$ a otro $x' \in [0, 1]$:

$$x' = \frac{x - a}{b - a}\,.$$

Si particularizamos la fórmula del binomio de Newton,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,,$$

al caso $y = 1 - x$, podemos ver fácilmente que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = [x + (1 - x)]^n = 1\,.$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta identidad por $f(x)$ y les restamos un polinomio de Bernstein, que está definido como

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)\,,$$

podemos escribir

$$f(x) - B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\,.$$

A partir de aquí tenemos

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| .$$

Supongamos ahora dos puntos $x, x_1 \in [0,1]$. Como $f(x)$ es continua en dicho intervalo,

$$\forall \epsilon > 0 \,, \exists \delta > 0 \;\mid\; |x - x_1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_1)| < \frac{\epsilon}{2} \,.$$

Por otro lado, como $f(x)$ está acotada,

$$\forall \xi \in [0,1] \,, \;\; |f(\xi)| < M \Longrightarrow |f(x) - f(x_1)| \leq 2M \,.$$

Teniendo en cuenta estos dos resultados podemos escribir que

$$|f(x) - f(x_1)| < \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{(x - x_1)^2}{\delta^2} \,.$$

En efecto, es evidente que si $|x - x_1| < \delta$ la continuidad de la función implica este resultado. Por el contrario, si $|x - x_1| \geq \delta$, entonces

$$\frac{(x - x_1)^2}{\delta^2} \geq 1$$

y el carácter de acotada de la función garantiza también el resultado. Como tanto x como k/n están en $[0,1]$, podemos escribir

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f;x)| \;\; &< \;\; \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k} \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \right] \\ &= \;\; \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad\;\; + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 . \end{aligned}$$

Ahora es conveniente demostrar algunos resultados. En primer lugar tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right) x^k(1-x)^{n-k} \\
&= x\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right) x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\
&= x\sum_{l=0}^{n-1}\left(\begin{array}{c} n-1 \\ l \end{array}\right) x^{l}(1-x)^{(n-1)-l} \\
&= x\,,
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\frac{k}{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right)$$

y hemos sustituido $l = k-1$ en la sumatoria. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k^2}{n^2}-\frac{k}{n^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n^2} \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\begin{array}{c} n-2 \\ k-2 \end{array}\right) x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}\left(\begin{array}{c} n-2 \\ k-2 \end{array}\right) x^{k-2}(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}x^2\sum_{l=0}^{n-2}\left(\begin{array}{c} n-2 \\ l \end{array}\right) x^{l}(1-x)^{(n-2)-l} \\
&= \frac{n-1}{n}x^2\,,
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\frac{k(k-1)}{n^2}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n-1}{n}\left(\begin{array}{c} n-2 \\ k-2 \end{array}\right)$$

y hemos sustituido $l = k-2$ en la sumatoria. A partir de ambos resultados tenemos

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x\,.$$

Los resultados obtenidos nos permiten escribir que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 = x^2 - 2x^2 + \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x = \frac{x(1-x)}{n} \,.$$

De acuerdo con estos resultados tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f;x)| \quad < \quad & \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \\ & = \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{4n} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} \,, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que, como $0 \leq x \leq 1$,

$$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4} \,.$$

Entonces, para cualquier grado n que cumpla

$$n > \frac{M}{\epsilon \delta^2} \,,$$

se verifica que

$$|f(x) - B_n(f;x)| < \epsilon \,, \quad 0 \leq x \leq 1 \,,$$

lo que demuestra el teorema.

2.7.2. Aproximación polinómica.

Hemos demostrado, utilizando los polinomios de Bernstein, que es posible aproximarse a una función dada tanto como queramos mediante un polinomio de un cierto grado. Sin embargo, los polinomios de Bernstein no pueden utilizarse para obtener el mejor polinomio posible, dado que su convergencia es muy lenta hacia la función a aproximar. Vamos a ver ahora un procedimiento que permite obtener el polinomio buscado de forma muy simple y directa.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. La aproximación polinómica de funciones mediante el método de mínimos cuadrados persigue encontrar un polinomio $p_n(x)$ de grado, a lo sumo, n, que minimice la función

$$E(x) = \int_a^b \mathrm{d}x \, [f(x) - p_n(x)]^2 \,,$$

es decir, minimizando el área entre ambas curvas.

Supongamos que el polinomio es

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,.$$

Hemos de determinar los coeficientes que minimicen el error

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \mathrm{d}x \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right]^2 \,.$$

El conjunto de condiciones necesarias para ello se pueden expresar como

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial a_l} &= \frac{\partial}{\partial a_l} \int_a^b \mathrm{d}x \left[f^2(x) - 2f(x) \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 \right] \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x \left[-2f(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial a_l} x^k + 2 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial a_l} x^k \right] \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x \left[-2f(x) \sum_{k=0}^{n} \delta_{kl} x^k + 2 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) \sum_{k=0}^{n} \delta_{kl} x^k \right] \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x \left[-2f(x) x^l + 2 \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k+l} \right] = 0\,,
\end{aligned}$$

de donde resulta

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b \mathrm{d}x\, x^{k+l} = \int_a^b \mathrm{d}x\, x^l\, f(x)\,, \quad l = 0, 1, \ldots, n\,,$$

que, como vemos, constituye un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. Calculando la integral en el primer miembro nos queda finalmente

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b^{k+l+1} - a^{k+l+1}}{k+l+1}\, a_k = \int_a^b \mathrm{d}x\, x^l\, f(x)\,, \quad l = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Ejemplo:
Encontrar un polinomio de segundo grado que aproxime a la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[0,1]$.
En este caso hemos de calcular el polinomio

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,.$$

El sistema de ecuaciones que nos proporciona los coeficientes del polinomio es el siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\, a_k &= \int_0^1 \mathrm{d}x \,\mathrm{sen}(\pi x) \\
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, a_k &= \int_0^1 \mathrm{d}x \, x \; \mathrm{sen}(\pi x) \\
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}\, a_k &= \int_0^1 \mathrm{d}x \, x^2 \; \mathrm{sen}(\pi x) \,.
\end{aligned}$$

Si ahora tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x \,\mathrm{sen}(\pi x) &= \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \\
\int_0^1 \mathrm{d}x \, x \; \mathrm{sen}(\pi x) &= \left[-\frac{x\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathrm{d}x \cos(\pi x) \\
&= \left[-\frac{x\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi^2} \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \\
\int_0^1 \mathrm{d}x \, x^2 \; \mathrm{sen}(\pi x) &= \left[-\frac{x^2\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mathrm{d}x \, x \; \cos(\pi x) \\
&= \left[-\frac{x^2\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{2x\,\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi^2} \right]_0^1 - \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \,\mathrm{sen}(\pi x) \\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \,,
\end{aligned}$$

el sistema de ecuaciones que debemos resolver es

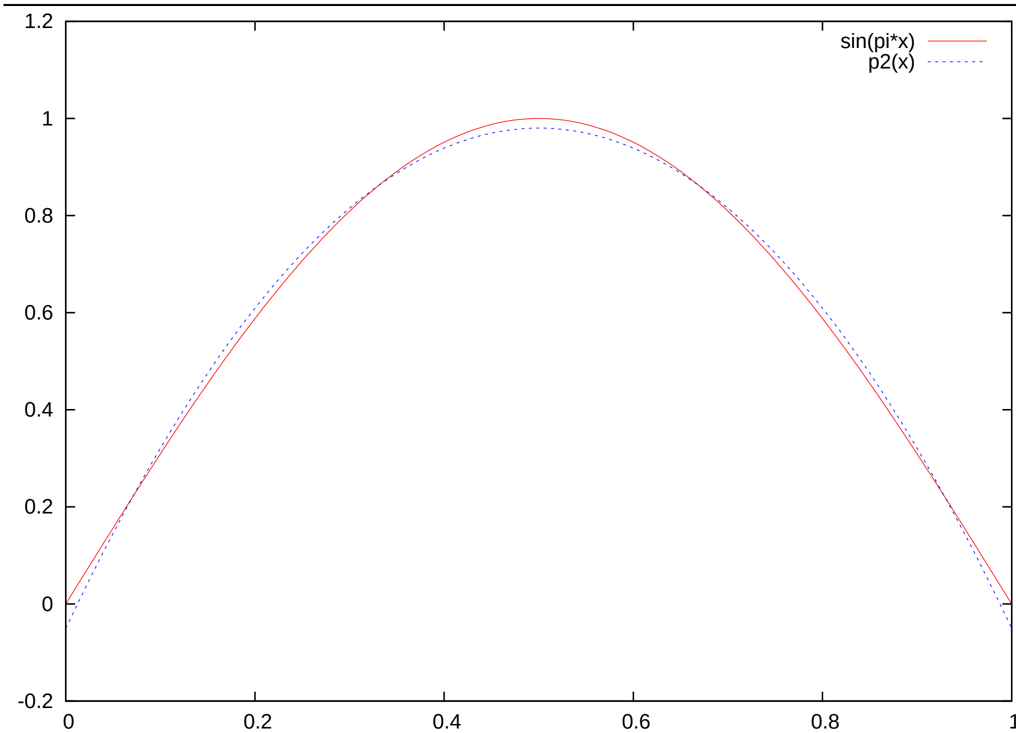
$$\begin{array}{rcl} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 &=& \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &=& \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 &=& \frac{\pi^2-4}{\pi^3}\,, \end{array}$$

cuya solución es

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3}\,,\quad a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3}\,.$$

En la figura podemos apreciar la bondad de la aproximación. En la tabla se muestran algunos valores numéricos.

	x=0	x=1/6	x=1/4	x=1/3	x=1/2
$\mathrm{sen}(\pi x)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$p_2(x)$	0.050465	0.522106	0.722505	0.865648	0.980162
$\mathrm{sen}(\pi x) - p_2(x)$	-0.050465	-0.022106	-0.015399	0.000377	0.019838



2.7.3. Ajuste de una nube de puntos.

Un problema de particular interés en relación con la experimentación en Física es el ajuste de un polinomio a una nube de puntos. El problema es similar al anterior, sólo que ahora, en lugar, de la función $f(x)$, tenemos únicamente un conjunto de $M+1$ puntos $\{(x_i, y_i),\, i = 0, 1, \ldots, M\}$ que pueden haberse obtenido al muestrear una función o como resultado de un experimento.

Partimos de un polinomio de grado n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \,.$$

En cada punto del conjunto inicial, se cometerá un error

$$e_i = |y_i - p_n(x_i)| \,.$$

Lo que imponemos para determinar los coeficientes del polinomio es que la suma de los cuadrados de los errores cometidos en cada punto sea mínima. Esta suma es

$$E = \sum_{i=0}^{M} e_i^2 \;=\; \sum_{i=0}^{M} [y_i - p_n(x_i)]^2 \;=\; \sum_{i=0}^{M} \left(y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k\, x_i^k \right)^2 \quad ,$$

e imponemos las condiciones

$$\frac{\partial E}{\partial a_l} \;=\; 0\,, \;\; l = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Tendremos entonces que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial a_l} \;&=\; \frac{\partial}{\partial a_l}\left[\sum_{i=0}^{M} \left(y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k\, x_i^k \right)^2 \right] \\
&=\; \frac{\partial}{\partial a_l}\left\{ \sum_{i=0}^{M} \left[y_i^2 - 2y_i \sum_{k=0}^{n} a_k\, x_i^k + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x_i^k \right)^2 \right] \right\} \\
&=\; \sum_{i=0}^{M} \left[-2y_i \sum_{k=0}^{n} \delta_{lk}\, x_i^k + 2 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x_i^k \right) \sum_{k=0}^{n} \delta_{lk}\, x_i^k \right] \\
&=\; \sum_{i=0}^{M} \left(-2y_i x_i^l + 2 \sum_{k=0}^{n} a_k\, x_i^{k+l} \right) = 0\,,
\end{aligned}$$

con lo que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{M} x_i^{k+l} = \sum_{i=0}^{M} y_i\, x_i^l\,, \quad l = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Como vemos, estas ecuaciones guardan paralelismo con las obtenidas en el caso de la aproximación de la función.

Un caso particular de interés es la regresión lineal, es decir, $n = 1$. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^{M} x_i^0 \;+\; a_1 \sum_{i=0}^{M} x_i^{1+0} &= \sum_{i=0}^{M} y_i\, x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=0}^{M} x_i^1 \;+\; a_1 \sum_{i=0}^{M} x_i^{1+1} &= \sum_{i=0}^{M} y_i\, x_i^1\,, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} a_0(M+1) \;+\; a_1 \sum_{i=0}^{M} x_i &= \sum_{i=0}^{M} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{M} x_i \;+\; a_1 \sum_{i=0}^{M} x_i^2 &= \sum_{i=0}^{M} y_i\, x_i\,. \end{aligned}$$

Definiendo ahora

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=0}^{M} x_i \\ S_y &= \sum_{i=0}^{M} y_i \\ S_{xx} &= \sum_{i=0}^{M} x_i^2 \\ S_{xy} &= \sum_{i=0}^{M} x_i\, y_i\,, \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema tenemos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{S_{xx}\, S_y \;-\; S_x\, S_{xy}}{(M+1)S_{xx} \;-\; S_x^2} \\ a_1 &= \frac{(M+1)S_{xy} \;-\; S_x\, S_y}{(M+1)S_{xx} \;-\; S_x^2}\,. \end{aligned}$$

Ejemplo:
Ajustar un polinomio de tercer grado a los puntos siguientes

$$(-2,4),\ (-1,0),\ (0,-2),\ (1,-2),\ (2,0)\,,$$

que han sido generados con el polinomio $p_2(x) = x^2 - x - 2$.
Partimos del polinomio genérico

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

y aplicamos las ecuaciones generales con $n = 3$ y $M = 4$. Definiendo

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^{M} x_i^{\alpha}\, y_i^{\beta}\,,$$

podemos escribir las ecuaciones a resolver en la forma

$$\begin{aligned}
a_0 S_{00} + a_1 S_{10} + a_2 S_{20} + a_3 S_{30} &= S_{01} \\
a_0 S_{10} + a_1 S_{20} + a_2 S_{30} + a_3 S_{40} &= S_{11} \\
a_0 S_{20} + a_1 S_{30} + a_2 S_{40} + a_3 S_{50} &= S_{21} \\
a_0 S_{30} + a_1 S_{40} + a_2 S_{50} + a_3 S_{60} &= S_{31}\,.
\end{aligned}$$

Calculemos ahora las sumas.

α	x_0^α	x_1^α	x_2^α	x_3^α	x_4^α	$S_{\alpha 0}$	$x_0^\alpha y_0$	$x_1^\alpha y_1$	$x_2^\alpha y_2$	$x_3^\alpha y_3$	$x_4^\alpha y_4$	$S_{\alpha 1}$
0	1	1	1	1	1	5	4	0	-2	-2	0	0
1	-2	-1	0	1	2	0	-8	0	0	-2	0	-10
2	4	1	0	1	4	10	16	0	0	-2	0	14
3	-8	-1	0	1	8	0	-32	0	0	-2	0	-34
4	16	1	0	1	16	34						
5	-32	-1	0	1	32	0						
6	64	1	0	1	64	130						

Entonces, el sistema es

$$\begin{aligned}
5a_0 + 10a_2 &= 0 \\
10a_1 + 34a_3 &= -10 \\
10a_0 + 34a_2 &= 14 \\
34a_1 + 130a_3 &= -34\,,
\end{aligned}$$

que, como vemos, está formado en realidad por dos subsistemas. El primero es

$$\begin{aligned} 5a_0 + 10a_2 &= 0 \\ 10a_0 + 34a_2 &= 14 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$a_0 = -2\,, \quad a_2 = 1\,.$$

El segundo subsistema es

$$\begin{aligned} 10a_1 + 34a_3 &= -10 \\ 34a_1 + 130a_3 &= -34\,, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$a_1 = -1\,, \quad a_3 = 0\,.$$

El polinomio resulta ser, por tanto, de grado 2

$$p_2(x) = x^2 - x - 2\,,$$

que coincide con el usado inicialmente para generar los puntos.

2.7.4. Aproximación de funciones mediante desarrollo de Fourier.

Vamos a utilizar ahora la serie de Fourier que definimos en un teorema anterior que, recordemos, viene dada por

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kt) \; + \; b_k \operatorname{sen}(kt)\right] \,,$$

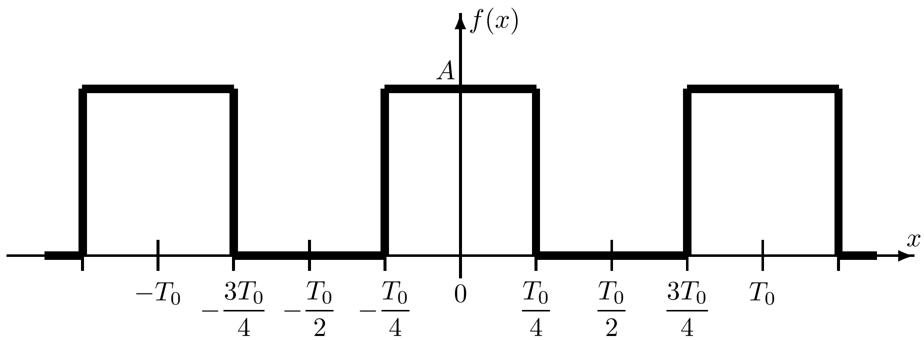
con

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\, f(t)\, \cos(kt)\,, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\, f(t)\, \operatorname{sen}(kt)\,. \end{aligned}$$

Ejemplo:
Aproximar mediante un desarrollo de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} A\,, & -\dfrac{T_0}{4} + nT_0 \leq x < \dfrac{T_0}{4} + nT_0\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0\,, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

La función que queremos aproximar es la de la figura.



La función tiene un período T_0 y vamos a aproximarla en el intervalo $\left[-\dfrac{T_0}{2}, \dfrac{T_0}{2}\right]$.
Lo primero que debemos hacer es convertir este intervalo en el intervalo $[-\pi, \pi]$ en el que estaban definidos los coeficientes del desarrollo. El cambio que tenemos que hacer es

$$x = \frac{T_0}{2\pi} t\,.$$

Los coeficientes vendrán dados entonces por

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \cos(k\omega_0 x)\,, \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \sin(k\omega_0 x)\,, \end{aligned}$$

donde hemos

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\,,$$

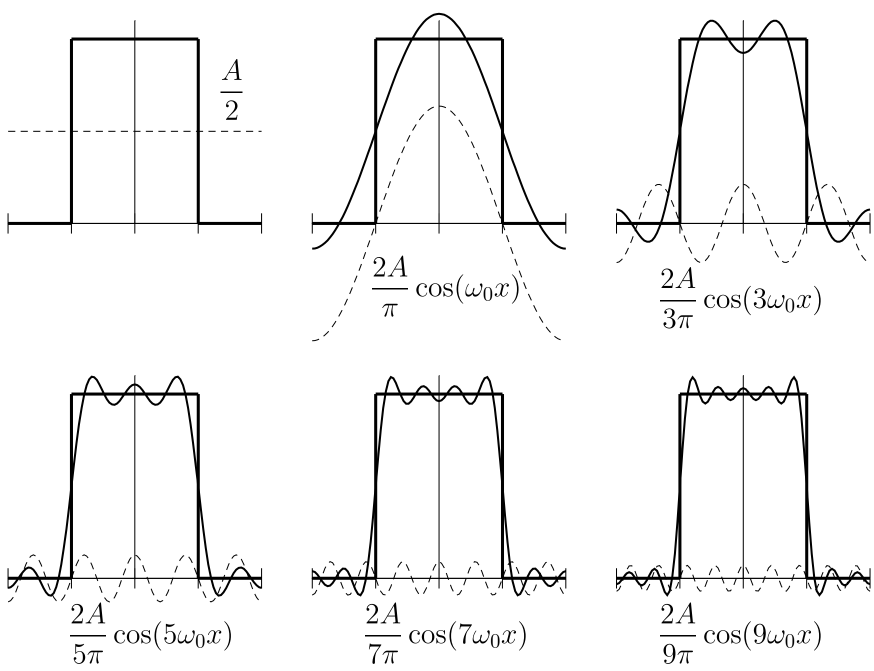
que se denomina frecuencia fundamental. Tenemos entonces para a_k,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \cos(k\omega_0 x) \;=\; \frac{2}{T_0}\, A \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \mathrm{d}x\, \cos(k\omega_0 x) \\ &= \frac{2A}{T_0}\left[\frac{\mathrm{sen}(k\omega_0 x)}{k\omega_0}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} = \frac{4A}{k\omega_0 T_0}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\omega_0 T_0}{4}\right) = \frac{2A}{k\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) . \end{aligned}$$

Por tanto, $a_k = \dfrac{2A}{k\pi}(-1)^{\frac{k-1}{2}}$ si k es impar, es nulo si k es par y $a_0 = A$. Por otro lado, la integral que nos da b_k es nula ya que la función $f(x)$ es par en el intervalo de integración, mientras que $\mathrm{sen}\, k\omega_0 x$ es impar en ese mismo intervalo. Por tanto, $b_k = 0$ y la función se aproxima por

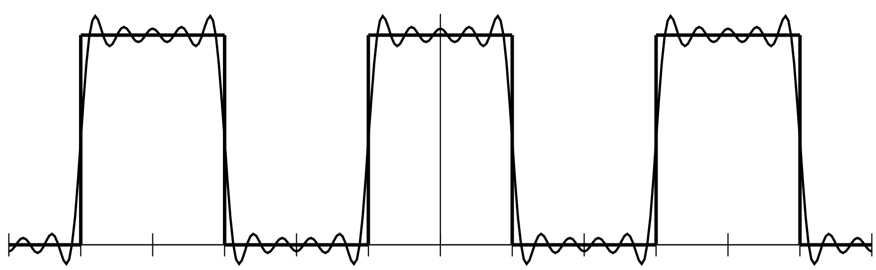
$$f(x) \approx \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\left[(2k+1)\omega_0 x\right] .$$

En la figura podemos ver los distintos términos involucrados.



Una cuestión importante es notar que los términos sucesivos van teniendo amplitud cada vez más pequeña. De todos ellos, sólo el segundo tiene la misma

frecuencia que la función $f(x)$. Las frecuencias de los términos sucesivos, que se denominan armónicos, son múltiplos de ω_0. La función cuadrada que hemos aproximado tiene, por tanto, infinitas frecuencias que constituyen su espectro.
Si extendemos la función ajustada a todo el intervalo de definición de la función $f(x)$, vemos que de forma natural, debido a la periodicidad de las funciones seno y coseno, tenemos el mismo nivel de aproximación de la función.



Como ya vimos en el caso de la interpolación de Fourier, es conveniente muchas veces utilizar una notación más compacta basada en la serie compleja de Fourier

$$S_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt)\,,$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t f(t) \exp(-ikt)\,.$$

Para ver su aplicación veamos cómo se lleva a cabo la aproximación del ejemplo anterior usando esta serie compleja.

Ejemplo:
Aproximar mediante un desarrollo de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} A\,, & -\dfrac{T_0}{4} + nT_0 \le x < \dfrac{T_0}{4} + nT_0\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0\,, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

usando la serie compleja de Fourier.

Haciendo el mismo cambio de variable que antes, los coeficientes del desarrollo vendrán dados ahora por

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \exp(-ik\omega_0 x) \,=\, \frac{1}{T_0}\, A \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \mathrm{d}x\, \exp(-ik\omega_0 x) \\
&= \frac{A}{T_0}\left[\frac{\exp(-ik\omega_0 x)}{-ik\omega_0}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} = \frac{2A}{k\omega_0 T_0}\frac{\left[\exp\left(-ik\omega_0\frac{T_0}{4}\right) - \exp\left(ik\omega_0\frac{T_0}{4}\right)\right]}{-2i} \\
&= \frac{2A}{k\omega_0 T_0}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\omega_0 T_0}{4}\right) \,=\, \frac{A}{k\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Los coeficientes de los términos en orden creciente de importancia son

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{A}{2} \\
c_{-1} &= \frac{A}{-\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \,=\, \frac{A}{\pi} \\
c_1 &= \frac{A}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \,=\, \frac{A}{\pi} \\
c_{-2} &= 0 \\
c_2 &= 0 \\
c_{-3} &= \frac{A}{-3\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{-3\pi}{2}\right) \,=\, -\frac{A}{3\pi} \\
c_3 &= \frac{A}{3\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \,=\, -\frac{A}{3\pi} \\
c_{-4} &= 0 \\
c_4 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Por tanto, la aproximación es

$$\begin{aligned}
f(x) \;\approx\; & \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\left[\exp(i\omega_0 x) + \exp(-i\omega_0 x)\right] \\
& - \frac{A}{3\pi}\left[\exp(i3\omega_0 x) + \exp(-i3\omega_0 x)\right] + \ldots \\
& = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\cos(\omega_0 x) - \frac{2A}{3\pi}\cos(3\omega_0 x) + \ldots\,,
\end{aligned}$$

que coincide con la que antes hemos obtenido.
