MÉTODOS NUMÉRICOS Y SIMULACIÓN
PRÁCTICAS.
Curso 2021/2022. 1º A y 1º C

SIMULACIÓN DE SISTEMAS FÍSICOS

1. **Obligatoria.** Péndulo matemático:
   Consideremos un péndulo simple de longitud L. La posición del péndulo queda determinada en cada instante t por el ángulo θ que forma el hilo con la vertical, siendo la ecuación de movimiento
$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0\,.$$
   Resuelve esta ecuación transformándola a un sistema de ecuaciones de primer orden, y usando los métodos de Euler y Runge-Kutta de orden 2. Considera como condiciones iniciales $\theta(0) = \pi/5$ y $\theta'(0) = 0$. Representa la solución numérica junto con la solución analítica [1], así como el error, en el intervalo $0 < t < 12 \cdot T$, siendo el período del péndulo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Asimismo, representa la evolución temporal de las energías cinética, potencial y total del sistema, dadas por
$$E_{\rm cin}(t) = \frac{1}{2}ML^2\theta'(t)^2\,, \quad E_{\rm pot}(t) = \frac{1}{2}MgL\theta(t)^2\,, \quad E_{\rm tot}(t) = E_{\rm cin}(t) + E_{\rm pot}(t)\,.$$
   Usa el paso $h = 1.5 \cdot 10^{-3} \cdot T$, y los valores de los parámetros $L = 0.6\,m$, $M = 0.180\,\mathrm{kg}$ y $g = 9.80665\,m/s^2$. [2]

2. Péndulo físico:
   La ecuación de movimiento de la práctica anterior es una aproximación válida para oscilaciones con amplitudes angulares suficientemente pequeñas. Si no se hace esta aproximación, la ecuación de movimiento se escribe como
$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,(\theta(t)) = 0\,,$$
   que no admite una solución analítica sencilla. Resuelve esta ecuación como en la práctica anterior, pero usando los métodos de Euler-Cromer y Runge-Kutta de orden 4. Representa la evolución temporal de las energías cinética, potencial y total del sistema. En este caso la energía potencial se expresa como
$$E_{\rm pot}(t) = MgL\,[1 - \cos(\theta(t))]\ .$$
   Compara con los resultados de la práctica anterior.

[1] La ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de la práctica 1 tiene como solución analítica
$$\theta_{\rm ana}(t) = \theta(0) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)\ .$$

[2] Aceleración de la gravedad, http://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2018-rev-phys-constants.pdf

3. Cálculo del número π con métodos Monte Carlo:

   Si se considera un círculo de radio R insertado dentro de un cuadrado de lado $2R$, la relación entre sus áreas viene dada por

   $$\frac{S_{\bigcirc}}{S_{\square}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4} \,.$$

   Teniendo en cuenta esta propiedad, calcula el número π generando $N = 10^5$ puntos aleatorios en la región

   $$\{(x, y) \quad | \quad -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1\} \,.$$

   Asimismo, estudia la dependencia del error con el número de puntos sorteados. Utilícese el generador de números pseudoaleatorios dado por

   $$x_{n+1} = 1366 x_n + 150889 \pmod{714025} \,,$$

   con semilla $x_0 = 1$. (El valor numérico de π es $\pi = 3.141592653589793238...$).

4. Evaluación de integrales con métodos de Monte Carlo:

   El método de Monte Carlo también se puede utilizar para calcular integrales sin utilizar el método de aceptación-rechazo del ejercicio 3. Es cierto que para integrales en una dimensión o en pocas dimensiones es muy poco útil, pero no lo es para integrales multidimiensionales o cuando el espacio de variables de integración donde mestrear (=calcular) la función tiene formas muy complicadas.

   En este caso, vamos a usar este método de Monte Carlo para calcular la integral de una función de una variable en un intervalo.

   Se pide que se calcule la siguiente integral

   $$\int_0^{\pi} \sin^3(x) dx \;,$$

   mediante este método, que se detalla a continuación, y que se compare el resultado con el valor exacto de la integral, que es 4/3.

   La idea del método es como sigue:

   - Primero hay que generar números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo $[0, \pi]$.
   - Para cada uno de esos números aleatorios generados en ese intervalo, hay que calcular (=muestrear la función) el integrando en ese punto.
   - Hay que ir sumando acumulativamente los valores que va tomando la función a integrar en cada uno de los puntos generados aleatoriamente.
   - Finalmente, el resultado de la integral usando este métodoes simplemente la suma del punto anterior dividida entre el número total de puntos aleatorios generados en el intervalo $[0, \pi]$, y multiplicada por el intervalo de integración, que es π

La idea de que este método funciona está basada en que es como calcular el valor medio del integrando y multiplicar este valor medio por el ancho (o *volumen*) de integración.

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{(x_f - x_i)}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \ ,$$

donde cada uno de los N valores x_j generados y utilizados para muestrear el integrando pertenecen al intervalo $x_j \in [x_i, x_f]$, y están uniformemente distribuidos en dicho intervalo.

Resumen de algoritmos para resolver ecuaciones de movimiento:

La segunda ley de Newton $F(t, x(t), v(t)) = m \cdot x''(t)$ se puede expresar como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} x'(t) &= v(t) \,, \\ v'(t) &= f(t, x(t), v(t)) \,, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$, donde $f(t, x(t), v(t)) := F(t, x(t), v(t))/m$. Si consideramos $t_{n+1} = t_n + h$, $x_n = x(t_n)$ y $v_n = v(t_n)$, los algoritmos para resolver este sistema son:

- Método de Euler:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hv_n \,, \\ v_{n+1} &= v_n + hf(t_n, x_n, v_n) \,. \end{aligned}$$

- Método de Euler-Cromer:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + hf(t_n, x_n, v_n) \,, \\ x_{n+1} &= x_n + hv_{n+1} \,. \end{aligned}$$

- Método de Runge-Kutta de orden 2:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (K_1 + K_2)/2 \,, \\ v_{n+1} &= v_n + (L_1 + L_2)/2 \,, \end{aligned}$$

  donde

$$\begin{aligned} K_1 &= hv_n \,, & L_1 = hf(t_n, x_n, v_n) \,, \\ K_2 &= h(v_n + L_1) \,, & L_2 = hf(t_n + h, x_n + K_1, v_n + L_1) \,. \end{aligned}$$

- Método de Runge-Kutta de orden 4:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 \,, \\ v_{n+1} &= v_n + (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)/6 \,, \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
K_1 &= hv_n\,, & L_1 &= hf(t_n, x_n, v_n)\,,\\
K_2 &= h(v_n + L_1/2)\,, & L_2 &= hf(t_n + h/2, x_n + K_1/2, v_n + L_1/2)\,,\\
K_3 &= h(v_n + L_2/2)\,, & L_3 &= hf(t_n + h/2, x_n + K_2/2, v_n + L_2/2)\,,\\
K_4 &= h(v_n + L_3)\,, & L_4 &= hf(t_n + h, x_n + K_3, v_n + L_3)\,.
\end{aligned}
$$