MÉTODOS NUMÉRICOS Y SIMULACIÓN.
GRADO EN FÍSICA, 1º A y 1ºC
Curso 2021/2022

Problemas: Interpolación y aproximación de funciones

1. Sea f una función conocida en los puntos x_1 y x_2. Encontrar el polinomio $P(x) = a+bx^2$ que interpola a la función anterior en dichos puntos.

2. Estúdiese el problema de interpolar una función f de dos variables $f(x,y)$ por un polinomio $a + bx + cy$, conocidos los valores de f en los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3).

3. El polinomio $p(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1)$ interpola los primeros cuatro puntos de la tabla:

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	2	-7	10

   - Añada un término a $p(x)$ de modo que el polinomio que resulte interpole a la tabla entera.
   - Tomando el conjunto de puntos dado por la tabla anterior, encuentra la regresión linear que mejor ajusta dicha nube de puntos.

4. Demuestre que si $u(x)$ es una función que interpola a $f(x)$ en x_0, x_1,..., x_{n-1} y si $v(x)$ es una función que interpola a $f(x)$ en x_1, x_2,..., x_n, entonces la función

$$\frac{(x_n - x)u(x) + (x - x_0)v(x)}{x_n - x_0} \tag{1}$$

   interpola a f en x_0, x_1,..., x_n.

5. Determine si la siguiente función es un *spline* cuadrático:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{x} \in (-\infty, 1] \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2} & x \in [1, 2] \\ \frac{3}{2} & x \in [2, \infty] \end{cases}$$

6. Determine los valores de a, b, c de manera tal que la siguiente función sea un *spline* cúbico con nodos 0, 1 y 2:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^2 & \text{x} \in [0, 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

   Calcule d de forma que $\int_0^2 [f''(x)]^2 dx$ sea un mínimo. Finalmente, encuentre el valor de d que hace de $f(x)$ un *spline* cúbico natural y explique por qué este valor es diferente del que se calculó previamente.

7. (a) Define un *spline* de orden k.

   (b) Determinar los valores de a, b y c que hacen de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \mathrm{x} \in [0,1] \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c & x \in [1,2] \end{cases}$$

   un *spline* cúbico.¿Es un *spline* natural?

8. Encontrar el polinomio de grado 3, $p_3(x)$ que interpola los siguientes puntos:

$$\{(x_k, y_k) = (0,0), (1,2), (4,-4)\},$$

   con la condición adicional $p_3'(0) = 1$.

9. Construir el spline cuadrático para los puntos (0,0), (1,1) y (2,-1) con la condición suplementaria $x'(1) = 0$.

10. (a) Encuentra las formas de Lagrange y de Newton de los polinomios de interpolación para los siguientes datos:

x	-2	0	1
$f(x)$	0	1	-1

   (b) Escribe ambos polinomios en la forma $a + bx + cx^2$ con el fin de verificar que son idénticos como funciones.

11. Dada la función $f(x)$ con $f(-2) = -15$, $f(0) = 5$, $f(1) = 6$, $f'(1) = 7$, $f''(1) = 18$, hallar el polinomio de interpolación que tiene los mismos valores y derivadas que la función en los puntos dados.

12. Construir el spline cúbico natural cuyos nodos son -1, 0 y 1 y que toma los valores s(-1)=13, s(0)=7, s(1)=9.

13. (a) Determinar los valores de a, b, c, d y e para los cuales la siguiente función es un *spline* cúbico:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & \mathrm{x} \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2 & x \in [1,3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & x \in [3, \infty] \end{cases}$$

   (b) A continuación, determinar los valores de los parámetros para que el *spline* cúbico interpole esta tabla:

x	0	1	4
y	26	7	25

14. (a) Encontrar un polinomio de primer grado que aproxime mediante el método de mínimos cuadrados la función $f(x) = \exp(x)$ en el intervalo [0, 1].

   (b) Obtenga el polinomio de segundo grado para el mismo caso del apartado previo.

15. Sea el conjuto de datos siguiente:

x	-2	-1.5	-0.5	0	0.1	0.2	2.5
y	3.37	2.55	0.95	0.89	0.81	0.77	1.55

   (a) Halle la recta que mejor ajusta ese conjunto por mínimos cuadrados.

   (b) Ajuste dichos datos por mínimos cuadrados por un polinomio cuadrático.