MÉTODOS NUMÉRICOS Y SIMULACIÓN.
GRADO EN FÍSICA, 1^{o} A y 1^{o}C
Curso 2021/2022

Problemas: Derivación e integración numéricas

1. Calcular las siguientes integrales por el método trapezoidal y de Simpson compuestos, con $n = 4$ y 6.

   (a) $I_a = \int_0^1 e^{-x}\, dx$.

   (b) $I_b = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} x \operatorname{sen}(x)\, dx$.

   (c) $I_c = \int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx$.

   (d) $I_d = \int_{\pi/24}^{2\pi+\pi/24} \operatorname{sen}(12x)\, dx$.

   (e) $I_e = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(12x)\, dx$.

   ¿Qué valor de n crees apropiado para realizar las integraciones anteriores?

2. Obtener los coeficientes $\{A_0, A_1\}$ y las abscisas $\{x_0, x_1\}$ para que la fórmula de cuadratura de tipo gaussiano

$$\int_0^\infty dx f(x) x e^{-x} \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

   sea exacta para todo polinomio de grado a lo sumo 3. Comprobar el resultado para el polinomio $p(x) = 3x^3 + 1$.
   Ayuda:

   Se sugiere usar como polinomio genérico de tercer grado la forma de Newton del polinomio que interpola en los puntos $x = x_0$, $x = x_1$ y $x = 0$.

   $\int_0^\infty dx x^k e^{-x} = k!$.

3. Usar el método de los coeficientes indeterminados para obtener la siguiente regla de integración, que es exacta para $f \in \Pi_3$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(x) dx = A_0 f(-3\pi/4) + A_1 f(-\pi/4) + A_2 f(\pi/4) + A_3 f(3\pi/4)$$

4. Usando los resultados del problema anterior, estimar las siguientes integrales:

   (a) $I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(x) dx$.

   (b) $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{senh}(x)\cos(x) dx$.

   (c) $I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)/(8\pi^3 + x^3) dx$.