MÉTODOS NUMÉRICOS Y SIMULACIÓN.
GRADO EN FÍSICA, 1º A y 1ºC
Curso 2021/2022

Problemas: Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resolver los siguientes sistemas lineales con el método de Gauss y con el de Gauss–Jordan.

   (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \\ -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

   (c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & 1 \\ 8 & 16 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Demuestre que si A tiene la propiedad (*fila unitaria diagonalmente dominante*)

$$a_{ii} = 1 > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\,, \quad (1 \leq i \leq n)$$

   entonces la iteración de Richardson funciona.

3. Sea el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   (a) ¿Converge la iteración de Jacobi para este sistema?
   (b) ¿Y la de Gauss–Seidel? ¿Y la de Richardson?
   (c) En caso de que alguna iteración no converja, ¿podría modificarse de forma sencilla el problema para usar dicha iteración y que converja? ¿Se puede elegir la modificación de forma óptima para una convergencia más rápida?

4. Use la serie de Neumann para calcular el inverso de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 & 0.3 \\ -0.2 & 0.9 & 0.1 \\ -0.1 & 0.3 & 1.0 \end{pmatrix}$$

5.
   - Describir el método de Gauss–Seidel para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

- Usando este método, encontrar la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

6. Programe el método de Gauss-Seidel y póngalo a prueba con los siguientes ejemplos:

   (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Analice lo que sucede cuando estos sistemas se resuelven por el método de Gauss o Gauss–Jordan.

7. Use la iteración de Gauss–Seidel para el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{pmatrix}$$

   Utilice $x_1^{(0)} = 0.33116$ y $x_2^{(0)} = 0.70000$ como punto de partida y explique qué ocurre.